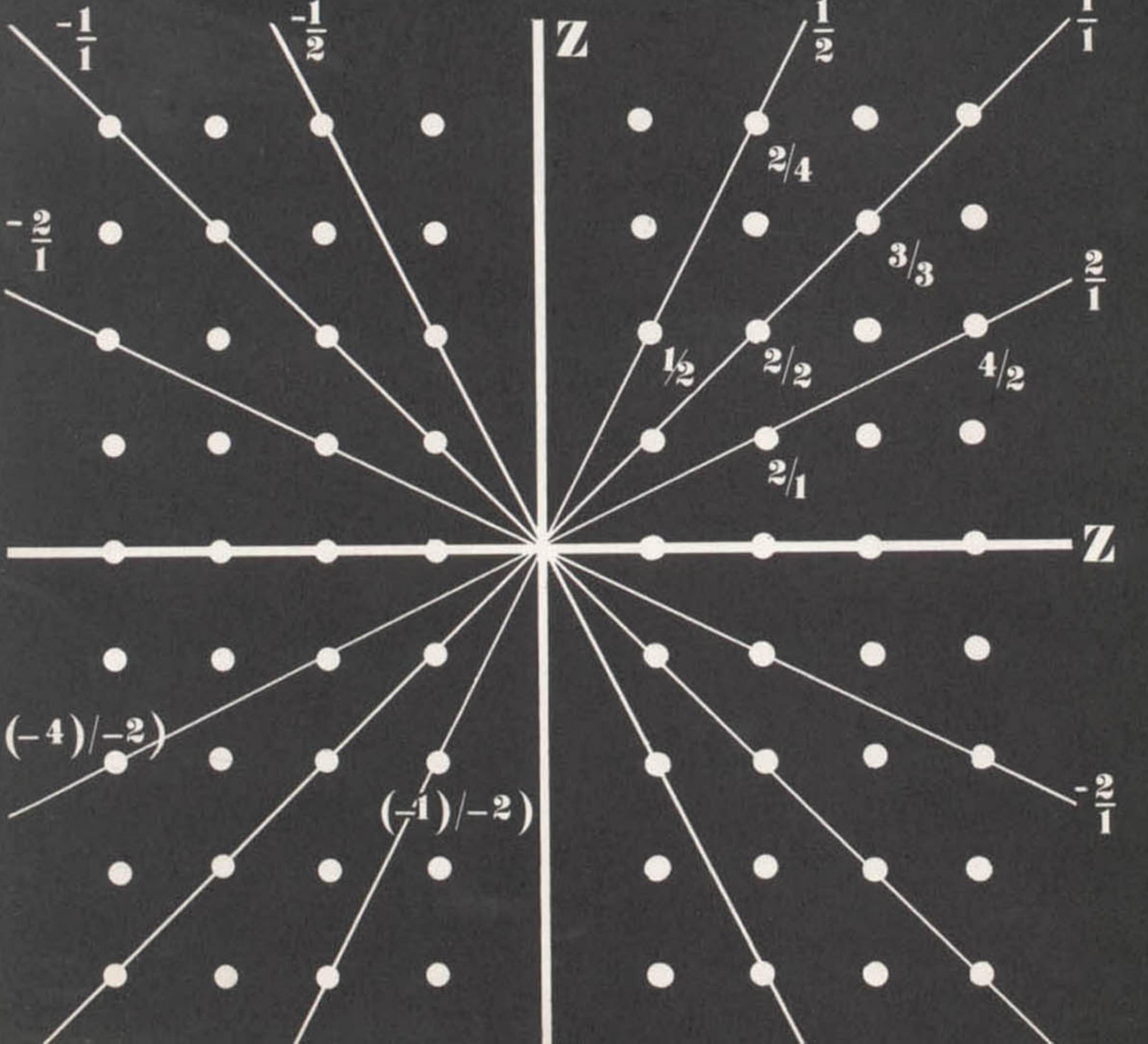
serie de matemática monografía no. 7

EL CONCEPTO DE NUMERO

Departamento de Asuntos Científicos
Unión Panamericana - Secretaría General
Organización de los Estados Americanos



EL CONCEPTO DE NUMERO

por

César A. Trejo

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

Departamento de Asuntos Científicos

Unión Panamericana

Secretaría General de la

Organización de los Estados Americanos

Washington, D.C. - 1968

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el
Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana

Editora: Eva V. Chesneau

A LOS LECTORES

La colección de monografías científicas forma parte de los programas generales de información y publicaciones del Departamento de Asuntos Científicos y tiene como finalidad principal difundir y presentar de manera sencilla los nuevos temas y métodos que surgen del rápido desarrollo de las ciencias y de la tecnología.

En la actualidad la colección consta de cuatro series, en español y portugués, sobre física, química, biología y matemática, pero se contempla la posibilidad de incluir otros ramos de las ciencias.

Desde su comienzo se destinó estas monografías a los profesores y estudiantes de ciencias de nivel secundario y universitario básico, no obstante se aspira a que encuentren también acogida entre los hombres de ciencias dedicados a la investigación especializada y el público en general que se interese en adquirir información o conocimientos sobre la materia.

En esta oportunidad, la Unión Panamericana agradece a la Agencia para el Desarrollo Internacional y a la Fundación Nacional de Ciencias de los Estados Unidos por la significativa ayuda económica recibida en apoyo de este programa, así como al Dr. César A. Trejo, autor de la monografía, y al Dr. José Adem del Centro de Investigación del Instituto Politécnico Nacional, México D. F., por la revisión técnica del manuscrito.

Jesse D. Perkinson
Director

PROLOGO

En la enseñanza de la matemática, desde la etapa elemental hasta la superior, es necesario adoptar algún concepto de número real de acuerdo con el nivel de estudios. La forma compleja del concepto de número real plantea problemas didácticos difíciles. Su definición rigurosa es complicada y se necesitaron muchos siglos para su desarrollo. En forma sucinta se puede describir su evolución como sigue.

Las primeras ideas de número aparecen en los albores de la civilización. Los antiguos babilonios y egipcios conciben, alrededor del año 2.000 a. de J.C., una aritmética en la que ya utilizan fracciones. Con Pitágoras, en el año 525 a. de J.C., los griegos descubren la necesidad de adoptar números irracionales, como $\sqrt{2}$. En el año 375 a. de J.C. Eudoxo presenta la teoría de los inconmensurables para representar irracionales como límite de magnitudes racionales. Los números negativos, que aparecen en la solución de diversos problemas, se consideran como absurdos, y sólo se manejan libremente a partir del siglo XVII. No es sino hasta la segunda mitad del siglo XIX que Cantor, Dedekind y Weierstrass desarrollan teorías rigurosas del número real, incluyendo racionales e irracionales. Así, reemplazando las magnitudes de Eudoxo por construcciones a partir de los números 1, 2, 3, ..., Cantor construye los irracionales como "sucesiones de racionales", Weierstrass los construye como "clases de racionales" y, finalmente, Dedekind como "cortaduras en clases infinitas de racionales". Estas teorías resultan equivalentes y permiten construir el continuo de los números reales a partir de los números naturales.

El Dr. César A. Trejo inicia su monografía con una construcción intuitiva de los números reales a partir de los naturales. Desarrolla posteriormente un estudio formal, a partir de los axiomas de Peano, para construir los números reales, primero por el método de encaje de intervalos, lo que le permite dar una idea del método de Cantor, y después por el método de cortaduras de Dedekind. La construcción y las propiedades de los números complejos se estudian en el último capítulo.

Esta monografía será indudablemente de gran utilidad a los profesores y alumnos en los diferentes niveles educativos para la resolución de los problemas didácticos mencionados al principio de este prólogo.

José Adem

México, D. F., enero de 1968

INDICE

CAPITULO 4. EL NUMERO REAL

CAPITULO 5. EL NUMERO COMPLEJO

INTRODUCCION. CONJUNTOS Y RELACIONES

0.1 Si se cotejan las nociones de número y estructura aritmética por una parte, con las nociones geométricas básicas por otra, se advierte el carácter mucho más abstracto de las primeras. Acaso por ello el desarrollo de la Aritmética es mucho más reciente que el de la Geometría: ya en el siglo III a. de J. C. tenemos en los *Elementos* de Euclides un magnífico intento de desarrollar la Geometría como sistema deductivo; tales intentos no se dan en la Aritmética sino en la época de Dedekind y Peano en el siglo XIX.

Asimismo, el carácter marcadamente abstracto de la noción de número hace que su exposición estructurada sea un problema didáctico difícil. En esta monografía procuraremos contribuir a la búsqueda de una solución de este problema, que por cierto no es única, mediante una exposición de conjunto de diversos aspectos y caminos matemáticos posibles, que intenta destacar los métodos modernos. Dependerá del nivel en que nos encontremos, determinar cuáles de los aspectos aquí tratados son adecuados o no para ser transmitidos al alumno, pero todos ellos son necesarios para que quien enseña logre para sí mismo una visión coherente de los aspectos matemático y metodológico.

0.2 En el capítulo 1 hacemos un primer enfoque, preliminar e intuitivo, hasta llegar al número real. Este primer capítulo desarrolla casi todo el tema de la monografía al nivel más elemental, y ofrece orientación panorámica y motivaciones para el estudio más detenido subsiguiente.

Las referencias como [(1)], [(2)], . . . , remiten a las notas que aparecen al final de la monografía. Estas notas pueden omitirse en una primera lectura; en general señalan aspectos menos elementales y muchas de ellas relacionan los temas, para el lector conocedor, con un contexto más amplio.

0.3 Recordemos aquí, muy sucintamente, algunas nociones generales sobre conjuntos y relaciones que luego usaremos.

a. Partiremos de las nociones básicas de *conjunto* y de *elemento de un conjunto.* Se indica que x es un elemento del conjunto A, o que x pertenece al conjunto A, escribiendo entre ambos el *símbolo de pertenencia* $\in$, es decir $x \in A$. Por ejemplo, si Z es el conjunto de los números enteros, para indicar que 2 es un número entero, o sea un elemento del conjunto Z, o sea que 2 pertenece a Z, escribiremos $2 \in Z$.

b. Supongamos que todo elemento de un conjunto A es elemento del conjunto B, o sea que $x \in A$ *implica* $x \in B$, lo que se indica también así: $x \in A \Rightarrow x \in B$, mediante el *símbolo de implicación* $\Rightarrow$. En tal caso se dice que A es *parte* o *subconjunto* de B, o que A esta *incluido* en B, y se escribe $A \subset B$, con el *símbolo de inclusión* $\subset$.

Según esta última definición, $A \subset A$, pues $x \in A \Rightarrow x \in A$.

c. Un conjunto está *determinado por sus elementos.* Es decir, si dos conjuntos A y B son tales que todo elemento de A es también elemento de B, y todo elemento de B es elemento de A, entonces A y B son el mismo conjunto: $A = B$.

d. Puesto que un conjunto está determinado por sus elementos, una manera sencilla de definirlo es dar una lista explícita de todos ellos. En tal caso se dice que el conjunto se define por *extensión* o *enumeración.*

Un conjunto definido por extensión se representa colocando entre *llaves* los nombres o símbolos de sus elementos, separados por *comas.* Por ejemplo, el conjunto A formado por los números 1, 2, 3 se escribe $A = \{1, 2, 3\}$.

El conjunto Z de los números enteros no puede definirse por extensión. No es posible escribir una lista de *todos* los números enteros, porque hay *infinitos,* es decir, Z es un *conjunto infinito.* Sólo los *conjuntos finitos* pueden definirse por extensión.

e. Un procedimiento más general para determinar un conjunto es dar una *propiedad* que caracterice a sus elementos, es decir, tal que los elementos del conjunto, y sólo ellos, tengan esa propiedad. En tal caso se dice que el conjunto se define por *comprensión.* Por ejemplo, un punto pertenece a la superficie de la esfera de centro O y radio 3 cm si, y sólo si, tiene la propiedad de estar a 3 cm de O, es decir, esa esfera se define por comprensión como el conjunto de los puntos que tienen la propiedad dicha.

Si el conjunto A se ha definido por comprensión mediante una condición o propiedad P de sus elementos, se lo menciona así: "A es el conjunto de los x tales que x tiene la propiedad P". Y se lo escribe así:

$$A = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad P}\}, \qquad (1)$$

mediante dos símbolos: *llaves* $\{\ \}$, que se lee con la frase "conjunto de los" antepuesta a su contenido, y *barra* $|$, que se lee "tales que".[1]

Por ejemplo, el conjunto Z de los números enteros se designa por comprensión así: $Z = \{x \mid x \text{ es un número entero}\}$.

f. Al dar por extensión un conjunto $\{a, b\}$ de dos elementos, éstos se escriben en un cierto orden. Pero, cualquiera que sea el orden elegido, el conjunto es el mismo: $\{a, b\} = \{b, a\}$. Por eso diremos que $\{a, b\}$ es un *par no ordenado*.

Pero a veces interesa el orden en que se consideran los elementos a, b, y tenemos los *pares ordenados:*

(a, b) de *primer elemento* a y *segundo elemento* b, 3
(b, a) de *primer elemento* b y *segundo elemento* a,

que son *diferentes:* $(a, b) \neq (b, a)$, si $a \neq b$.

En general:

$$(a, b) = (a', b') \text{ si, y sólo si, } a = a' \text{ y } b = b'.$$

Por ejemplo,

$$(a, b) = (2, 3) \text{ si, y sólo si, } a = 2 \text{ y } b = 3;$$

en cambio

$$\{a, b\} = \{2, 3\}$$

si $a = 2$ y $b = 3$, y también si $a = 3$ y $b = 2$.

g. Se llama *producto cartesiano* del conjunto A por el conjunto B, y se indica $A \times B$, el conjunto de los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b)\ a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{p, q\}$, es

$$A \times B = \{(a,p),\ (a,q),\ (b,p),\ (b,q),\ (c,p),\ (c;q)\}.$$

Conviene escribir los elementos de este conjunto A × B en una tabla de doble entrada (inferior e izquierda), así:

Elementos de B	q	(a,q)	(b,q)	(c,q)	Elementos de A × B
	p	(a,p)	(b,p)	(c,p)	
		a	b	c	
		Elementos de A			

También puede representarse gráficamente A × B por un diagrama como el de la figura 1.

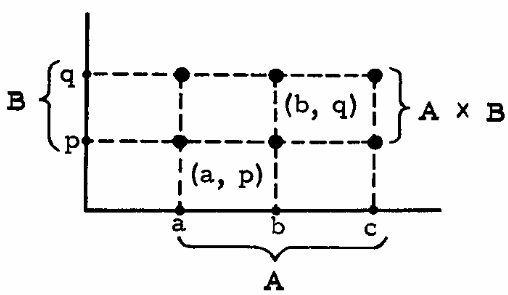


Fig. 1

4

Más generalmente, el método de las coordenadas cartesianas conduce a idear un *diagrama* del producto cartesiano A × B para conjuntos A y B cualesquiera (no necesariamente conjuntos de puntos): los conjuntos A y B *se representan* por segmentos de dos rectas perpendiculares entre sí, y el producto cartesiano A × B *se representa* (Fig. 2) por el rectángulo limitado por las paralelas a esas rectas, trazadas por los extremos de aquellos segmentos.

Los *elementos* a de A y b de B *se representan* por puntos de los respectivos segmentos, y la intersección de las paralelas a los ejes trazadas por ellos, *representa* el elemento (a, b) de A × B.

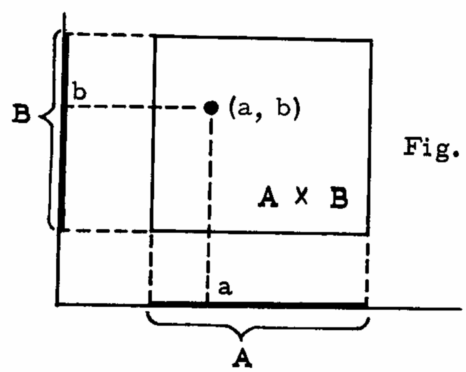


Fig. 2

h. Sean A y B dos conjuntos. Si entre los pares ordenados (a, b) de A × B se consideran los que verifican una condición o propiedad P, se obtiene un subconjunto $R \subset A \times B$. Tal condición P aplicada a un par ordenado (a, b) expresa lo que en lenguaje ordinario se llama una *relación* entre a y b. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3\}$, la condición (relación entre a y b) "a es menor que b", aplicada a los seis pares ordenados (a, b) de $A \times B$ da el conjunto

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \subset A \times B.$$

La condición "a es menor que b" equivale a $(a, b) \in R$.

En Matemática es usual identificar el conjunto R con la relación, y definir una *relación* como un subconjunto cualquiera de un producto cartesiano:

Definición. *Se llama* *<u>relación</u>* *de* A *en* B *a todo subconjunto* R *del producto cartesiano* $A \times B$.

En lugar de $(a, b) \in R$ escribiremos también $a\ R\ b$, que se lee: "a está en la relación R con b".

Una relación de A en A se llama *relación en* A.

1

PRIMER ENFOQUE DEL CONCEPTO DE NUMERO Y SUS AMPLIACIONES

1. El Número Natural

1.1 Durante la mayor parte del siglo XIX, pese a haberse generalizado de modo más o menos informal las ampliaciones del concepto de número para obtener a partir de los números naturales [2]

$$0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

clases cada vez más amplias de números (enteros, racionales, reales, complejos, ...) se tenía el concepto de *número natural* por algo tan simple y transparente a la mente, que parecía imposible analizarlo o referirlo a otros conceptos más simples. Este estado de cosas se refleja en la afirmación de L. Kronecker (1823-1891): "Dios creó los números naturales; lo demás es obra del hombre".

1.2 Para indagar el significado de los números naturales (1), no basta dar su conjunto

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{2}$$

que sólo por "abuso de notación" indicamos así, por enumeración (véase 0.3 d), ya que se trata de un conjunto infinito. Es preciso considerar estos números tal como se presentan en (1), *ordenados en una sucesión*, en la cual podemos señalar de manera informal e intuitiva estas características:

(a) Se parte de un elemento especial, 0;

(b) la sucesión no termina nunca ni se ramifica;

(c) tampoco se cierra sobre sí misma (como ocurre, por ejemplo, con los números de la esfera del reloj, en los cuales a 12 sigue el número 1 de partida);

(d) la sucesión no tiene "puntos de confluencia", es decir, ningún elemento sigue inmediatamente a dos distintos;

(e) no hay números naturales "intercalados entre" los de la sucesión, ni excluidos de ella: partiendo de 0 y pasando reiteradamente al elemento siguiente, se obtienen *todos* los números naturales.

Precisamente estas características condujeron a R. Dedekind y a G. Peano [3] a fundamentar el concepto de número natural en cinco axiomas, a partir de los cuales se estudian sus propiedades, operaciones, etc. De esto trata el capítulo 2.

1.3 Otro método de llegar al mismo resultado, originado en G. Cantor (1845-1918) y F. L. G. Frege (1848-1925), y perfeccionado sobre todo por B. Russell (n. en 1872), se basa en la idea de *coordinabilidad* de conjuntos.

Preguntémosnos: *¿Hay aquí tantos asientos como personas?* Un modo de averiguarlo es *contar* los asientos y contar las personas. Si los resultados son iguales, o sea, el mismo número, la respuesta es: *sí*. Si los resultados son diferentes, la respuesta es: *no*. Al proceder así hemos logrado una información mayor que la necesaria para responder a la pregunta, a saber: el número de personas y el número de asientos.

Hay otra manera de responder a la pregunta: pedir que cada persona se siente en un asiento diferente. Pueden ocurrir tres casos:

(a) No quedan personas de pie, pero sí asientos desocupados;

(b) no quedan asientos desocupados, pero sí personas de pie;

(c) no quedan ni personas de pie ni asientos desocupados.

Sólo en el caso (c) la respuesta es: *sí*. En este caso diremos también que el conjunto de asientos y el de personas son *coordinables*.

Este segundo método nos muestra que el concepto de *coordinabilidad* o sea de tener *el mismo número de elementos* puede darse independientemente del concepto de *número de elementos*. En esta observación se basa precisamente el método de Cantor-Frege-Russell: en lugar de utilizar el número para verificar la coordinabilidad, se utiliza la coordinabilidad de conjuntos para definir el número:

Se llama *número cardinal* de un conjunto C a la clase de los conjuntos coordinables con C. [4]

1.4 No proseguiremos con el método de coordinabilidad de conjuntos, pero señalemos que se aplica también a *conjuntos infinitos*. Consideremos, por ejemplo, el conjunto N de los números naturales y el conjunto P de los números naturales pares. *¿Tienen estos conjuntos* N *y* P *el mismo número de elementos?* De los dos métodos seguidos en 1.3 para responder a una pregunta similar, sólo es aplicable ahora el segundo.

Notemos que a *cada* número natural n se le puede asignar o hacer corresponder su doble $2n$, que es par, y como de esta manera se obtienen *todos* los números naturales pares, una vez cada uno, *los conjuntos* N *y* P *son coordinables*.

Consideremos las dos respuestas siguientes a nuestra pregunta:

(R_1) N *tiene más elementos que* P, pues todo número natural par es un número natural, pero hay números naturales que no son pares;

(R_2) N *y* P *tienen el mismo número de elementos porque son coordinables*.

¿Cuál de estas respuestas es la correcta? Depende de la convención que se adopte. La convención que ha resultado muchísimo más conveniente y fructífera, y se adopta en Matemática, es la que conduce a la respuesta (R_2).

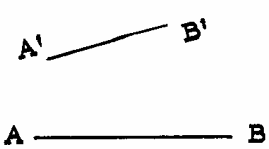


Fig. 3

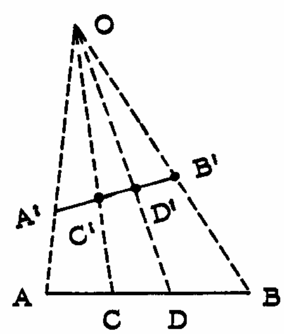


Fig. 4

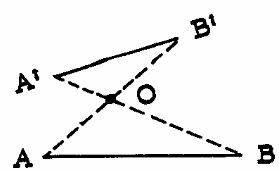


Fig. 5

¿Tienen los segmentos AB y A'B' de la figura 3 el mismo número de puntos? Sí, porque estos conjuntos de puntos son coordinables, como puede verse de dos maneras diferentes proyectando un segmento sobre el otro desde un punto O conveniente. Como tal, puede elegirse la intersección de las rectas AA' y BB' (Fig. 4) o la intersección de las rectas AB' y BA' (Fig. 5).

2. Números Enteros. Construcción de una Escala

2.1 Supongamos definida la *suma* de números naturales (se hará en el capítulo 2-5.1). Se define entonces la *diferencia* o *resta* como operación inversa de la suma. Calcular 5 - 3 es hallar un número que sumado a 3 dé como resultado 5. Entonces: 5 - 3 = 2 *puesto que* 3 + 2 = 5, y en general:

$$a - b = c \text{ significa que } b + c = a. \qquad (3)$$

En cambio, la diferencia 3 - 7 no puede efectuarse *en* N pues no hay ningún número *natural* que sumado a 7 dé como resultado 3. Luego: *La operación de restar no es siempre posible en el conjunto* N *de los números naturales.*

Esta dificultad conduce a ampliar el conjunto (2) de los números para que la resta sea siempre posible. Para ello se introduce, para cada número natural a, el *número negativo* $-a$, llamado *opuesto* de a, ampliando a la vez la definición de suma mediante esta convención:

Propiedad del número opuesto:

$$(-a) + a = a + (-a) = 0 \text{ para todo } a. \qquad (4)$$

Por ejemplo, - 4 es, por definición, el número que sumado a 4 da 0. Es - 0 = 0, pues 0 + 0 = 0.

La diferencia 3 - 7 es ahora calculable, y se tiene 3 - 7 = - 4, pues 3 - 7 sumado a 4 da como resultado 0: [5]

$$4 + (3 - 7) = (4 + 3) - 7 = 7 - 7 = 0.$$

Con esta ampliación obtenemos el conjunto Z de los *números enteros:*

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \qquad (5)$$

2.2 Mediante una *regla* y un *triángulo* (no necesariamente rectángulo como en el caso de la escuadra) se pueden trazar paralelas. La figura 6 muestra cómo se traza la paralela a una recta r por un punto P deslizando un triángulo sobre el borde de una regla. [6]

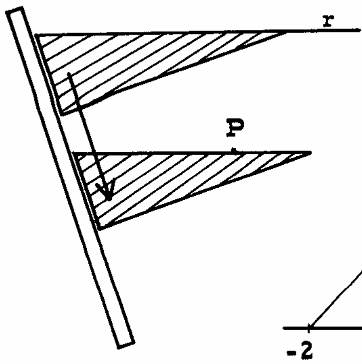


Fig. 6

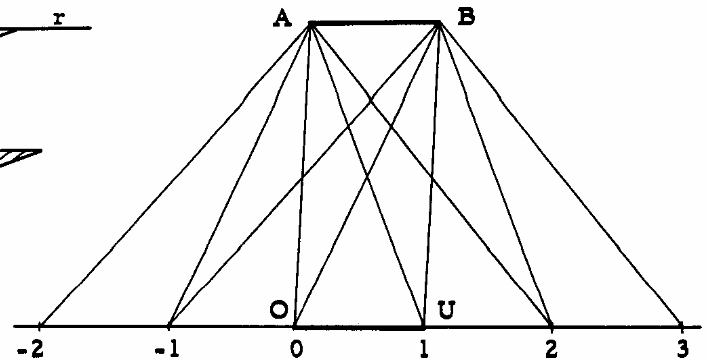


Fig. 7

Los números enteros pueden representarse por ciertos puntos de una recta, en la cual se han elegido dos puntos cualesquiera distintos O y U para representar los números 0 y 1 respectivamente. La figura 7 indica cómo se construye la *escala métrica para* Z mediante una regla y un triángulo, es decir, usando solamente las relaciones de incidencia entre puntos y rectas, y el paralelismo. Se pasa del punto que representa un número entero al que representa al número siguiente o precedente mediante una "cadena" de dos paralelogramos con un lado común, a partir de un paralelogramo que tenga al segmento OU como uno de sus lados. Por ejemplo, el "punto 2" (o sea, el punto que representa al número 2) se determina mediante la cadena de paralelogramos OUBA, BAU2.

Los puntos O y U se llaman, respectivamente, *origen* y *punto unidad* de la *escala métrica para* Z o *eje de abscisas para* Z.

2.3 Una *suma algebraica,* como

$$1 - 3 + 4 \qquad (6)$$

se reduce a una *suma* sustituyendo cada sustraendo por su número opuesto:

$$1 + (-3) + 4. \qquad (7)$$

Los sumandos de (7), o sea, los números

$$1, -3, 4,$$

se llaman *términos* de la suma algebraica (6). Una escala métrica para Z facilita mucho el cálculo de estas sumas algebraicas, imaginando que cada término indica un movimiento en la recta, y que en el primero se parte del origen 0.

En la suma algebraica (6), el primer término nos lleva al punto 1. El segundo término, - 3, indica que hay que retroceder 3 unidades desde donde estábamos; así llegamos al punto - 2. El tercer término, 4, indica avanzar 4 unidades, lo que lleva al punto 2 (Fig. 8).

Conclusión:

$$1 - 3 + 4 = 2$$

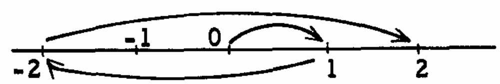


Fig. 8

y las sumas algebraicas calculadas sucesivamente son:

$1 - 3 = -2, \qquad -2 + 4 = 2.$

3. Escalas Concurrentes y Operaciones Enteras

3.1 Supuesta definida la multiplicación en N, o entre números naturales (véase capítulo 2-5.2), la definición se amplía a los números enteros mediante la conocida "regla de los signos". Esta regla es aceptada por los estudiantes con curiosidad no exenta de dudas y resistencias, especialmente en el caso ilustrado por:

$$(-5) \times (-4) = 20 \tag{8}$$

que suele justificarse mediante una argumentación como ésta:

Si he *gastado* 5 pesos por día (- 5), ¿cuánto más que ahora tenía *hace* 4 días (- 4)? Tenía 20 pesos *más;* "luego", $(-5) \times (-4) = 20$.

Para introducir la regla de los signos sin apelar a "razonamientos" como éste, es necesario asimilar el concepto de número en un nivel estructural.

3.2 **Definición.** *Dos escalas para* Z *se llaman* *concurrentes* *si están en rectas secantes y el punto de intersección es origen de ambas* (Fig. 9).

Para evitar ambigüedades, escribiremos en caracteres arábigos y romanos, respectivamente, los números de las escalas E_1 y E_2.

Mediante un par de escalas concurrentes se puede efectuar geométricamente la *multiplicación* de un entero por otro, con

12

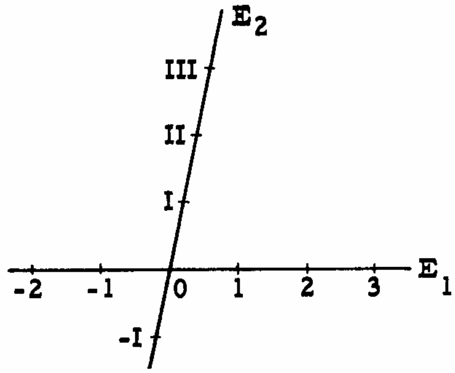


Fig. 9

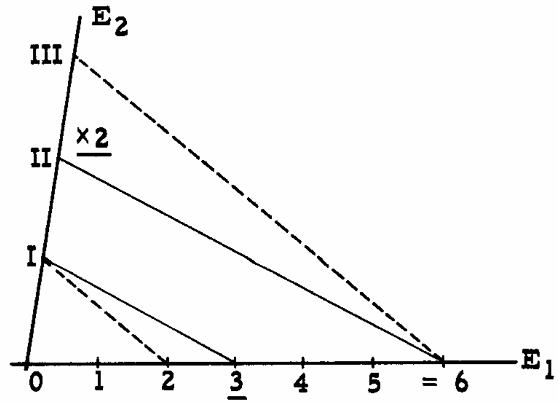


Fig. 10

regla y *triángulo* es decir, con el solo recurso de las propiedades de incidencia entre puntos y rectas, y del paralelismo.

Para hallar el producto 3×2 se traza la recta I3 y luego su paralela por II; ésta determina en la escala E_1 el producto $3 \times 2 = 6$ (Fig. 10, líneas llenas). Para hallar el producto 2×3 se traza la recta I2 y luego su paralela por III; esta paralela determina en la escala E_1 el producto $2 \times 3 = 6$ (Fig. 10, líneas punteadas).

La figura 11 indica la construcción del producto $(-3) \times (-2) = 6$; la figura 12 muestra la construcción del producto $3 \times (-2) = -6$ (líneas llenas) y del producto $(-3) \times 2 = -6$ (líneas punteadas). (7)

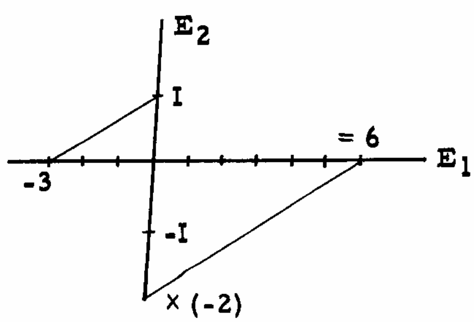


Fig. 11. $(-3) \times (-2) = 6$.

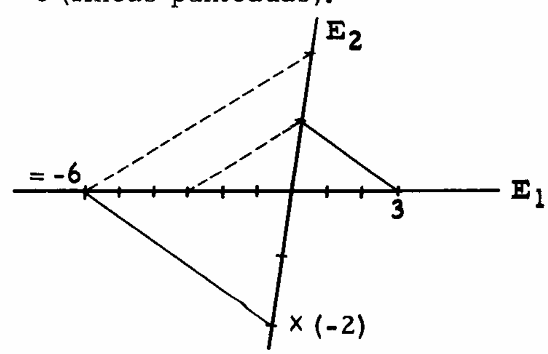


Fig. 12. $3 \times (-2) = -6$.
Punteado $(-3) \times 2 = -6$.

3.3 Las operaciones de ***suma, resta*** y ***multiplicación*** se llaman ***operaciones enteras.*** El nombre se debe a que son siempre realizables en el conjunto Z de los números ***enteros,*** aunque también lo son en otros conjuntos ***más amplios*** que hemos de considerar, a saber: Q (números racionales), R (reales) y C (complejos). (8)

3.4 Construidas (con regla y triángulo) dos escalas concurrentes para Z, se pueden efectuar (también con regla y triángulo) todas las operaciones enteras. En la figura 13 se efectúa geométricamente este cálculo:

$$(1 - 3 + 5) \times (-2) + 1 = 3 \times (-2) + 1 = -6 + 1 = -5.$$

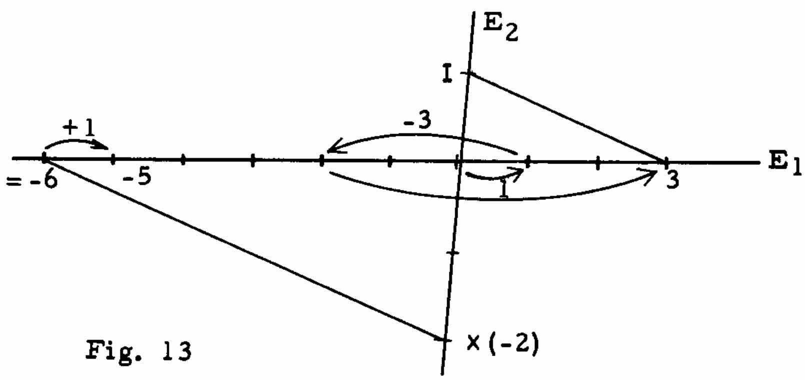


Fig. 13

4. Números Racionales. Ampliación de la Escala. Densidad

4.1 (Confróntese 2.1) Supongamos definida la *multiplicación* de números enteros (véase 3.1, 3.2 y capítulo 3-5). Se define entonces la *división* como operación inversa de la multiplicación. Calcular 12 : 4 es hallar un número que multiplicado por 4 dé como resultado 12. Entonces: 12 : 4 = 3 *puesto que* 4 × 3 = 12, y en general:

$$a : b = c \text{ significa que } b \times c = a. \tag{9}$$

En cambio, la división 3 : 7 no puede efectuarse *en* Z, pues no hay un número *entero* que multiplicado por 7 dé como resultado 3. Por lo tanto: *La operación de dividir no es siempre posible en el conjunto Z de los números enteros.*

Esta imposibilidad conduce a ampliar el conjunto (5) de los números a fin de que la división *por un divisor no nulo* sea siempre realizable. Para ello se introduce, para cada número entero a *no nulo* ($a \neq 0$), un número $\frac{1}{a}$, llamado *inverso* de a, ampliando a la vez la definición de multiplicación, mediante este convenio:

Propiedad del número inverso:

$$\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1 \text{ para todo } a \neq 0. \tag{10}$$

La operación $3:7$ es ahora realizable y se tiene:

$$3:7 \;=\; 3 \times \tfrac{1}{7} \text{ (que se denota por } \tfrac{3}{7}\text{)}$$

pues el número $3 \times \frac{1}{7}$, multiplicado por 7, da por resultado 3: [9]

$$\begin{aligned}(3 \times \tfrac{1}{7}) \times 7 &= 3 \times (\tfrac{1}{7} \times 7) = \quad \text{(por (10))}\\ &= 3 \times 1 = 3.\end{aligned}$$

Análogamente, $3:(-2) = 3 \times \frac{1}{-2}$, que es igual a $-(3 \times \frac{1}{2})$, y se designa $-\frac{3}{2}$.

Con esta ampliación obtenemos el conjunto Q de los *números racionales.* [10]

4. 2 Una escala métrica que representa a Z (véase 2. 2) puede ahora ampliarse a fin de representar cualquier número *racional,* con lo cual se obtiene la *escala métrica correspondiente a* Q. Esto puede hacerse mediante dos únicos instrumentos geométricos: *regla* y *triángulo,* es decir, recurriendo sólo a las propiedades de incidencia entre puntos y rectas, y al paralelismo. [11] Para ello se construye antes otra escala para Z, concurrente con la dada.

La figura 14 muestra cómo se determina en la escala E_1 el punto representativo del número $\frac{1}{3}$. Una vez trazada la recta III 1, su paralela por I determina en la escala E_1 el punto buscado. La figura 15 indica la construcción de una parte de la escala métrica para Q, a saber, la de los múltiplos de $\frac{1}{3}$.

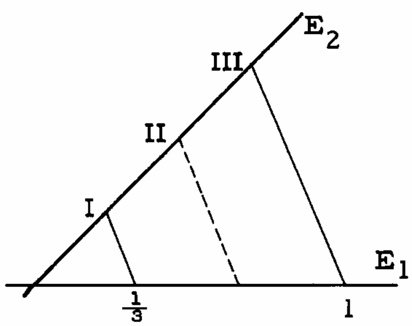


Fig. 14

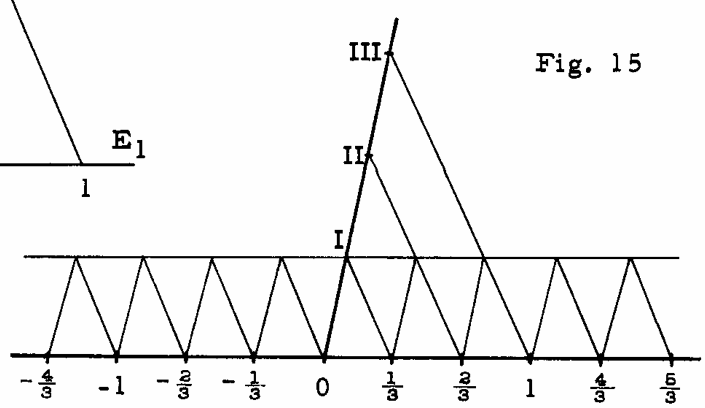


Fig. 15

4. 3 (Confróntese 3. 3) Las operaciones de *suma, resta, multiplicación* y *división* se llaman *operaciones racionales.* El nombre se debe a que son siempre realizables en el conjunto Q de los números *racionales* (con la única restricción de divisor no nulo en el caso de la última), aunque también lo son en otros conjuntos *más amplios* que hemos de considerar, a saber: R (números reales) y C (complejos).

4.4 Construidas (con regla y triángulo) dos escalas métricas concurrentes de Q, se pueden efectuar (también con regla y triángulo) todas las operaciones racionales. En la figura 16 se efectúa geométricamente la división de $\frac{3}{4}$ por $\frac{3}{5}$: se traza la recta que une los puntos $\frac{3}{4}$ de la escala E_1 y $\frac{3}{5}$ de la escala E_2; su paralela por I determina en E_1 el punto buscado $\frac{5}{4}$. Se llega al mismo resultado *multiplicando* $\frac{3}{4}$ *por la fracción inversa del divisor* (Fig. 16, líneas punteadas).

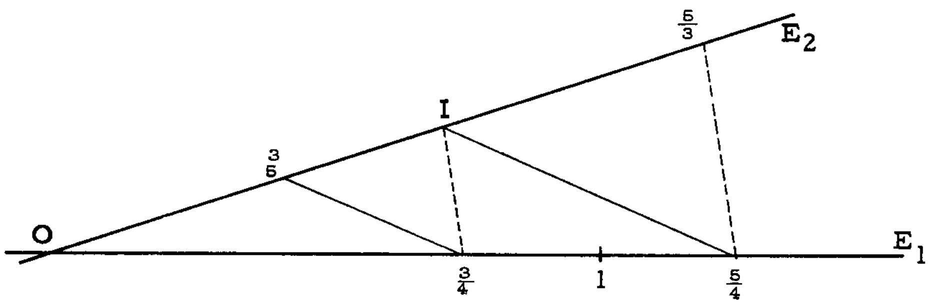


Fig. 16. $\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{5}{4}$. Líneas punteadas, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{4}$.

4.5 Dados dos números racionales p y q tales que $p<q$, siempre hay otro número racional r tal que $p < r < q$. Diremos que r está *entre* p y q.

En efecto, si p y q son racionales, lo es también el número $r = \dfrac{p+q}{2}$. Este número está representado (Fig. 17) por el punto medio del segmento pq. En efecto, es fácil ver que $q - r = r - p$.

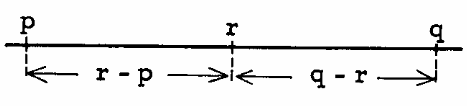


Fig. 17

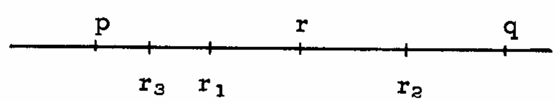


Fig. 18

Como consecuencia: *Entre dos números racionales distintos* p *y* q *hay otro número racional* r, *y por tanto infinitos* (pues entre p y r hay un racional r_1, figura 18, entre r y q otro r_2, entre p y r_1 otro r_3, etc.).

La propiedad que acabamos de demostrar se expresa diciendo que *el conjunto de los numeros racionales es* <u>*denso*</u> *respecto de la relacion* $<$.

Intuitivamente: en cualquier segmento de la escala métrica para Q, por pequeño que sea, hay infinitos puntos que representan números racionales. O sea, estos puntos "se acumulan" en todas partes.

4.6 Por ser denso el conjunto Q de los números racionales, todas las magnitudes medibles de que se hace uso en la práctica y hasta en la ciencia aplicada pueden ser expresadas mediante éstos con suficiente grado de aproximación. La precisión de los más perfectos instrumentos de medida no nos puede obligar a salir del campo de los números racionales.

5. Números Irracionales. Aproximaciones Decimales

5.1 Puesto que, como acabamos de ver, los puntos de la *escala racional* cubren *densamente* la recta (es decir, en todo segmento, por pequeño que sea, hay infinitos puntos de esa escala), podría pensarse que la escala racional comprende *todos* los puntos de la recta. Pero no es así: no obstante su densidad, *los números racionales no agotan los puntos de la recta.* Para comprobarlo observemos que todo número racional $\frac{m}{n}$, al efectuar la división de m por n en el sistema decimal, se expresa:

(a) O bien como *fracción decimal* o número *"decimal finito"*, si se llega a un resto cero, por ejemplo,

$$\tfrac{1}{5} = 0,2; \qquad \tfrac{3}{8} = 0,375;$$

(b) O bien como *expresión decimal periódica.* En efecto, si al dividir m por n no se obtiene nunca un resto cero, puesto que los sucesivos restos son todos menores que n, llega un momento en que uno se repite y, a partir de él, se repiten las cifras del cociente. Ejemplos:

$$\tfrac{4}{3} = 1,333\ldots = 1,\widehat{3}; \qquad \tfrac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ldots = 0,\widehat{142857}.$$

Por consiguiente, un *decimal infinito* (es decir, con infinitas cifras) *no periódico,* como

$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots \tag{11}$$

no puede representar un número racional. A estos números los llamamos *irracionales*. La denominación "irracional" proviene de la imposibilidad de representar el número como *razón* de dos enteros.

La figura 19 muestra cómo, dada una escala métrica de Q, se puede determinar *con regla y compás* [12] un punto de la recta que no pertenece a tal escala.

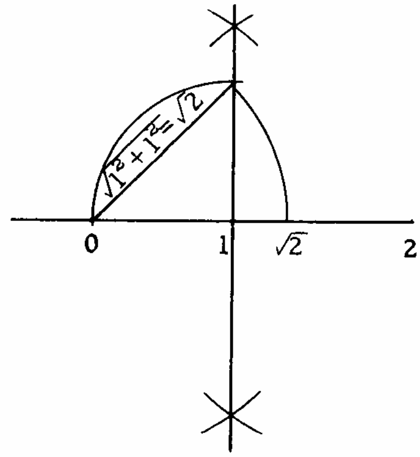


Fig. 19

5.2 Con lo dicho en 5.1 queda probado que todo *decimal infinito no periódico* representa un número *irracional*. Esto basta para demostrar la existencia de infinitos números irracionales. Pero no hemos probado que el decimal (11) que expresa $\sqrt{2}$ sea un decimal infinito no periódico. Por ello demostraremos directamente que:

$\sqrt{2}$ es un número irracional.

Por ser $1^2 < 2$ y $2^2 > 2$, el número $\sqrt{2}$ (cuyo cuadrado es 2) está *entre* 1 y 2 y, por tanto, no es entero.

Si $\sqrt{2}$ *no fuera irracional*, tendríamos

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \tag{12}$$

siendo m y n enteros positivos y $n \neq 1$. Podemos suponer además que m y n son primos entre sí, pues de lo contrario reduciríamos la fracción dividiendo ambos términos por su máximo común divisor. De (12) se obtiene:

$$2 = \frac{m^2}{n^2}\text{, de donde } m^2 = 2n^2. \tag{13}$$

Pero si m y n son primos entre sí, también lo son m^2 y n^2, en contradicción con la igualdad (13) según la cual m^2 es múltiplo de n^2, es decir, ambos tienen el divisor común $n^2 \neq 1$. Entonces, la suposición (12) conduce a una contradicción, y es por tanto falsa. En consecuencia, $\sqrt{2}$ es irracional.

5.3 La existencia de *segmentos inconmensurables*, o lo que es lo mismo expresando la longitud de cada segmento por un número, la existencia de *números irracionales*, fue descubierta por los griegos posiblemente en el siglo V a. de J. C. (escuela pitagórica). Este descubrimiento es un acontecimiento científico de gran trascendencia, que dejó profunda huella en la matemática y la filosofía desde entonces hasta hoy. La teoría de los inconmensurables de Eudoxo (408-335 a. de J.C.), expuesta en forma geométrica en los *Elementos* de Euclides, es una obra maestra de la matemática griega, no debidamente apreciada hasta la segunda mitad del siglo XIX, después que R. Dedekind, F. L. G. Frege, G. Cantor y K. Weierstrass construyeron una teoría rigurosa del número real.

5.4 Gracias a la densidad del conjunto Q de los números racionales (4.5), todo número irracional se puede expresar por números racionales con tanta aproximación como se quiera. Por ejemplo, el número irracional $\sqrt{2}$ dado por (11) se aproxima indefinidamente por los números racionales expresados por decimales finitos: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...

En general, los decimales infinitos se pueden interpretar en términos del concepto de *aproximación*.

Definición. *Se llaman aproximaciones decimales, al entero, al décimo, al centésimo,... de un número dado en forma decimal, a los decimales finitos que se obtienen considerando sus cifras: enteras, hasta el décimo, hasta el centésimo,... respectivamente.*

Ejemplos. Aproximaciones decimales de los números:

	-1;	3, 18;	$0,333... = 0,\widehat{3}$.
Al entero:	-1;	3;	0;
Al décimo:	-1;	3, 1;	0, 3;
Al centésimo:	-1;	3, 18;	0, 33;
Al milésimo:	-1;	3, 18;	0, 333.

6. Sucesiones Convergentes. Noción de Número Real

6.1 Todo número a, escrito en el sistema decimal, puede concebirse como una *sucesión*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \tag{14}$$

de *decimales finitos*, que son sus aproximaciones decimales al entero, al décimo, al centésimo, etc. Esta sucesión tiene la propiedad de que si el número a tiene r dígitos antes de la coma decimal, los primeros $r + h$ dígitos de las aproximaciones

$$a_h,\ a_{h+1},\ a_{h+2},\ \ldots$$

son los mismos. Por ejemplo, si $a = 10\pi = 31,41592\ldots$, la sucesión (14) es

$$a_0 = 31;\quad a_1 = 31,4;\quad a_2 = 31,41;\quad a_3 = 31,415;\quad a_4 = 31,4159;\ \ldots$$

y los primeros 2 + 3 = 5 dígitos de todas las aproximaciones

$$a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots$$

son los mismos: los del decimal finito 31,415.

6.2 Para el decimal infinito $0,999\ldots = 0,\widehat{9}$, con todos sus dígitos iguales a 9 desde el segundo en adelante, la sucesión (14) de sus aproximaciones decimales es

$$0;\quad 0,9;\quad 0,99;\quad 0,999;\quad 0,9999;\ \ldots \tag{15}$$

Pero ésta es también una sucesión de aproximaciones (por defecto) de 1, con errores:

$$1-0=1;\ 1-0,9=0,1;\ 1-0,99=0,01;\ 1-0,999=0,001;\ldots$$

Convendremos, pues, en poner:

$$0,999\ldots = 0,\widehat{9} = 1. \tag{16}$$

Más generalmente, convendremos en que un decimal infinito con todos sus dígitos iguales a 9, desde uno en adelante, se identifica con el *decimal finito* que resulta de él suprimiendo esos dígitos y aumentando en 1 el que precede al primero de ellos. Por ejemplo:

$$4,5\widehat{9} = 4,6;\quad -6,7\widehat{9} = -6,8;\quad 1,98\widehat{9} = 1,99.$$

6.3 Definición provisional. *Llamaremos número real a todo decimal finito o infinito, positivo, nulo o negativo.*

Por ejemplo, son números reales:

$$0,02;\quad -3,5;\quad 0;\quad 1,333\ldots = 1,\widehat{3};\quad 35,45678\ldots$$

Los cuatro primeros son racionales:

$$\tfrac{2}{100};\quad -\tfrac{35}{10};\quad 0;\quad \tfrac{4}{3};$$

del quinto no podemos afirmar si es racional o no; en caso de ser decimal infinito no periódico será seguramente irracional.

6.4 Una sucesión de números *reales*

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ \ldots \tag{17}$$

se llama ***convergente*** si esos números pueden escribirse en forma decimal de modo tal que, dado un entero positivo cualquiera k, todos los términos de la sucesión desde uno en adelante tienen los mismos primeros k dígitos, en la misma posición con respecto a la coma decimal.

Toda sucesión convergente (17) determina un único número real a. Este es el dado por el decimal que, para cada k, tiene por k-ésimo dígito el k-ésimo dígito de todos los elementos de la sucesión desde uno en adelante. Este número real se llama *límite* de la sucesión (17), y se escribe:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n,$$

que se lee: "límite de a_n cuando n tiende al infinito".

6.5 Ejemplos

(i) La sucesión (14) de aproximaciones decimales de un número real es una sucesión convergente (véase 6.1), y su límite es ese número real.

(ii) La sucesión (15) es convergente y su límite es 1. Es también la sucesión de aproximaciones decimales de este número, escrito en la forma $0,\widehat{9}$ (véase (16)).

(iii) La sucesión

$$1; \quad 0,9; \quad 1; \quad 0,99; \quad 1; \quad 0,999; \quad 1; \ldots$$

es convergente, pues puede escribirse en la forma:

$$0,99\ldots; \quad 0,9; \quad 0,99\ldots; \quad 0,99; \quad 0,99\ldots; \ldots$$

por ser $1 = 0,99\ldots = 0,\widehat{9}$. Su límite es $0,99\ldots = 0,\widehat{9} = 1$.

6.6 A partir de las definiciones de 6.3 y 6.4, se pueden definir las operaciones fundamentales con los números reales. Comencemos por las operaciones ***enteras*** (suma, resta y multiplicación, véase 3.3). Sean a y b dos números reales dados por sus sucesiones de aproximaciones decimales: las sucesiones (14) y

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \ \ldots \tag{18}$$

respectivamente, que son sucesiones convergentes (6.5). Se puede demostrar que también son convergentes las sucesiones

$$a_0 + b_0, \quad a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \ \ldots \tag{19}$$

$$a_0 - b_0, \quad a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \ \ldots \tag{20}$$

$$a_0 \cdot b_0, \quad a_1 \cdot b_1, \quad a_2 \cdot b_2, \ \ldots \tag{21}$$

Sus límites son ciertos números reales que *se llaman:*

	suma	$a + b$,
	diferencia	$a - b$,
y	*producto*	$a \cdot b$,

de los números reales a y b, respectivamente.

6.7 Consideremos ahora la ***división*** de un número real a por otro b, ***no nulo*** ($b \neq 0$). Puesto que es $b \neq 0$, sus aproximaciones decimales son ***no nulas*** desde una en adelante. Por ejemplo, si $b = 0{,}002$, sus aproximaciones decimales son:

$$b_0 = 0; \ b_1 = 0{,}0 = 0; \ b_2 = 0{,}00 = 0; \ b_3 = b_4 = b_5 = \ldots = 0{,}002;$$

y entonces es $b_n \neq 0$ para todo $n \geq 3$.

Suprimiendo entonces un número finito de términos de la sucesión (18), queda una nueva sucesión, también convergente, con el mismo límite b, y con sus términos ***todos no nulos.*** Llamémosla

$$b'_0, \quad b'_1, \quad b'_2, \quad \ldots$$

Se demuestra que también es convergente la sucesión de cocientes:

$$a_0/b'_0, \quad a_1/b'_1, \quad a_2/b'_2, \quad \ldots; \tag{22}$$

y su límite es un número real que *se llama*

cociente a/b

de dividir el número real a por el número real b.

6.8 Las definiciones dadas en 6.6 y 6.7 se basan en la convergencia de las sucesiones (19) a (22), que no hemos demostrado. Por otra parte las consideraciones anteriores, si bien podrían completarse en forma matemáticamente inobjetable, tienen el inconveniente de basarse en un particular sistema de numeración y no en propiedades estructurales de los distintos campos numéricos. En el capítulo 4 veremos enfoques más generales, sin este defecto.

2

EL NUMERO NATURAL

1. Sistemas Deductivos y Axiomas

1.1 En este capítulo presentaremos la teoría del número natural en forma axiomática, es decir, como sistema deductivo. Recordemos, pues, brevemente, qué es un sistema deductivo.

1.2 Una teoría científica no es un simple catálogo o lista de proposiciones. El conocimiento científico se alcanza sólo cuando nuestras proposiciones *se estructuran* de modo sistemático, de suerte que podamos advertir sus mutuas relaciones.

Ahora bien, ¿qué relaciones mutuas importa percibir?; ¿cómo se estructuran las proposiciones de una disciplina científica? En una ciencia, algunas proposiciones se pueden *deducir* o *demostrar* a partir de otras: por ejemplo, tanto las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas como las de Galileo sobre la caída de los graves pueden *deducirse* de las leyes generales de la Dinámica y la ley de gravitación de Newton; la relación mutua entre estas leyes es una parte de la *ciencia* física.

Una disciplina matemática se estructura en un conjunto de proposiciones llamadas *teoremas*, cada uno de los cuales *se deduce* de otros anteriores. De aquí el nombre de *sistema deductivo* aplicado a una teoría matemática estructurada lógicamente.

1.3 Puesto que para demostrar una proposición o teorema hay que partir de otras proposiciones ya establecidas, siempre hemos de tomar unas *proposiciones como primeras*, que hay que aceptar sin demostración. No es que exista en una teoría matemática alguna proposición que no pueda demostrarse a partir de otras, sino que *no pueden demostrarse TODAS ELLAS a la vez*, pues por fuerza ha de partirse de algunas (que acaso puedan elegirse de varias maneras posibles). De igual modo, los teoremas de la teoría enuncian propiedades de ciertos objetos o entes ideales, algunos de los cuales podrán definirse mediante otros, pero también es forzoso partir de ciertos *conceptos primitivos* u *objetos primitivos*, como "conjunto", "número", "punto", "recta", etc. Entre los conceptos primitivos puede haber predicados o atributos de relaciones y operaciones primitivas tales como "sig", siguiente a; "$\in$", pertenece a; "$\subset$", incluido en; etc.[13]

Los conceptos primitivos y las proposiciones primitivas se reúnen en un sistema de *axiomas* o *postulados* que definen el sistema deductivo, constituyendo a la vez la base sobre la cual *se demuestran* los teoremas y se elaboran los conceptos no primitivos de la teoría.

2. Axiomas de Peano

2.1 Ya hemos dicho en 1-1.2 que para precisar el significado de los números naturales no basta dar su *conjunto* N = {1, 2, 3, ...}, sino considerar estos números *ordenados en una sucesión*

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

y señalamos de manera informal las características que conducen al sistema de axiomas de Peano.

Al presentar los axiomas de Peano como *proposiciones primeras* o *primitivas* de un sistema deductivo, se tiene que partir de ciertos *conceptos primitivos* (véase 1.3) que aquí son los tres siguientes:

(a) Un *conjunto* N, cuyos elementos se llaman "números naturales";

(b) Un *objeto* matemático llamado "cero" e indicado por el símbolo "0";

(c) Una *relación* en N, denotada por la frase "es siguiente de" o por el símbolo "sig".

Dado un elemento x del conjunto N (o sea, un número natural x), un elemento de N que esté en esta relación con x se llamará "siguiente de x" y se anotará "sig(x)". (Naturalmente, las expresiones anteriores no implican asignar sentido intuitivo alguno a la relación indicada por "sig"; ésta es una *relación primitiva.*)

2.2 Los conceptos primitivos (a) a (c) se vinculan entre sí por las siguientes proposiciones primitivas, llamadas *axiomas de Peano:*[3]

Axioma 1. *El objeto* 0 *(cero) pertenece al conjunto* N: $0 \in N$. (O sea: 0 es un número natural.)

Axioma 2. *Si* $x \in N$, *existe y es único* $\mathrm{sig}(x) \in N$. (O sea: A cada número natural corresponde un número natural llamado siguiente de él, unívocamente determinado.) [14]

Axioma 3. *Para todo* $x \in N$ *es* $\mathrm{sig}(x) \neq 0$. (O sea: 0 no es siguiente de ningún número.)

Axioma 4. *Si* $\mathrm{sig}(x) = \mathrm{sig}(y)$, *entonces* $x = y$. (O sea: Un número natural no puede ser siguiente de dos distintos.) [15]

Axioma 5. *Si* C *es subconjunto de* N ($C \subset N$) *y verifica:*

$$\text{(i)}\ 0 \in C;$$
$$\text{(ii)}\ x \in C \Rightarrow \mathrm{sig}(x) \in C;$$

entonces $C = N$.

(O sea: Si un conjunto C de números naturales cumple estas dos condiciones:

(i) 0 pertenece a C;
(ii) Si un número natural pertenece a C, también su siguiente pertenece a C;

entonces, TODOS los números naturales pertenecen al conjunto C.) [16]

3. Inducción Completa

3.1 El axioma 5, asimismo llamado *axioma de recurrencia* o de *inducción completa*, puede enunciarse también así:

Un conjunto de números naturales al que pertenezcan 0 *y el número siguiente de cada uno de sus elementos, es la totalidad de ellos.*

En este axioma se basa el *principio de inducción completa*, que se aplica, como ahora veremos, como método de definición y de demostración.

3.2 En la *definición por recurrencia* se introduce un concepto en que interviene un número natural arbitrario, y se *construye* por inducción el ente $E(n)$ que se define. Por tanto, esta forma de conceptuación es en realidad un método de *razonamiento constructivo*, que consiste en definir el objeto $E(n)$ para $n = 0$ es decir, el objeto E(0)), y en indicar luego un procedimiento para construir $E(n+1)$ a partir de $E(n)$, cualquiera que sea el número natural n.[17] (Al definir la suma en 5.2, veremos que $n+1 = \operatorname{sig}(n)$).

3.3 Ejemplo. En lugar de definir la potencia de exponente natural a^n como producto de n factores iguales a a (lo cual no aclararía el significado de a^0), podemos definir a^n por recurrencia así:

$$\begin{cases} a^0 = 1, & (1) \\ a^{n+1} = a^n \cdot a, & (2) \end{cases}$$

o sea, llamaremos a^0 al número 1, y (supuesto ya definido a^n) llamaremos a^{n+1} al producto de a^n por a.

3.4 Del axioma 5 de Peano resulta:

Teorema. *Sea* p(n) *una proposición que depende de un número natural* n. *SI*

(i) p(0) *es verdadera;*

(ii) *Para todo* $x \in N$, $p(x) \Rightarrow p(x+1)$;

ENTONCES la proposición p(n) *vale para todo número natural* n.

Demostración. Sea C el conjunto de los números naturales x para los cuales p(x) es verdadera. En virtud de las hipótesis (i) y (ii), el subconjunto $C \subset N$ cumple las condiciones (i) y (ii) del axioma 5, y por tanto C = N. O sea, p(n) es verdadera para todo $n \in N$.

3.5 En este teorema se basa el método de *demostración por recurrencia* o *por inducción completa.*[18]

Ejemplo 1. Definida la potencia de exponente natural a^n por recurrencia mediante las igualdades (1) y (2) *demostrar* que

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n. \qquad (3)$$

Demostración. (i) Para $n = 0$ es, en virtud de (1):

$$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0. \qquad (4)$$

(ii) Supongamos que (3) es válida para $n = x$:

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x. \qquad (5)$$

Multiplicando ambos miembros por $a \cdot b$, y transformando el segundo mediante las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, [19] se obtiene:

$$(a \cdot b)^x \cdot (a \cdot b) = (a^x \cdot b^x) \cdot (a \cdot b) = (a^x \cdot a) \cdot (a^x \cdot b),$$

y aplicando aquí (2) al primer miembro y a cada uno de los paréntesis del último miembro, resulta:

$$(a \cdot b)^{x+1} = a^{x+1} \cdot b^{x+1}. \qquad (6)$$

ENTONCES, (5) implica (6), y esto, conjuntamente con (4), demuestra la validez de (3) para todo $n \in N$ en virtud del teorema de 3.4.

Ejemplo 2. Probar que para todo número $h > -1$ y todo número natural n vale la desigualdad:

$$(1 + h)^n \geq 1 + n \cdot h. \qquad (7)$$

Demostración. (i) Para $n = 0$ se cumple (7) pues ambos miembros dan 1, y es $1 \geq 1$.

(ii) Supongamos que (7) se cumple para $n = x$:

$$(1 + h)^x \geq 1 + x \cdot h. \qquad (8)$$

Multiplicando ambos miembros por $1 + h$ (que es positivo pues $h > -1$) resulta

$$(1 + h)^{x+1} \geq (1 + x \cdot h) \cdot (1 + h) = 1 + xh + h + xh^2,$$

y como $xh^2 \geq 0$ resulta de aquí:

$$(1 + h)^{x+1} \geq 1 + xh + h = 1 + (x + 1) \cdot h. \qquad (9)$$

ENTONCES, (8) implica (9), y esto, conjuntamente con (i), demuestra la validez de (7) para todo $n \in N$ en virtud del teorema de 3.4.

Nota. La restricción $h > -1$ es esencial. Si fuera $h < -1$, al multiplicar ambos miembros de (8) por el número ***negativo*** $1 + h$, se invertiría el sentido de la desigualdad.

Que (7) no vale sin esa restricción lo muestra el ejemplo $h = -3, n = 5$; (7) da $(-2)^5 \geq 1 + 5 \cdot (-3)$, o sea $-32 \geq -14$, *falso*.

3.6 Señalemos esta sencilla y útil generalización del teorema de inducción completa de 3.4:[20]

Teorema. *Sea* p(n) *una proposición que depende de un número natural* n. *SI, para un cierto numero natural* n_0:

(i) *la proposición* p(n_0) *es verdadera;*

(ii) $p(x) \Rightarrow p(x+1)$ *para todo número natural* $x \geq n_0$;

ENTONCES vale la proposición p(n) *para todo número natural* $n \geq n_0$.

La demostración consiste en considerar la proposición q(x) definida para todo $x \in N$ poniendo

$$q(x) = \begin{cases} (x = x) & \text{si} \quad x < n_0 \\ p(x) & \text{si} \quad x \geq n_0, \end{cases}$$

es decir, q(x) es la proposición *verdadera* $x = x$ si $x < n_0$, y coincide con p(x) si $x \geq n_0$. A esta proposición q(x) le es aplicable el teorema de recurrencia de 3.4. En consecuencia, q(x) es verdadera para todo $x \in N$. Pero esto significa que p(x) es verdadera para todo número natural $x \geq n_0$.

3.7 **Ejemplo.** *Demostrar que para todo número natural* n *es*

$$2^n > n. \tag{10}$$

La proposición p(n) que se quiere demostrar es ahora $2^n > n$.

Vale p(0), pues

$$2^0 = 1 > 0. \tag{11}$$

Demostremos ahora que la proposición (10) vale para todo número natural $n \geq 1$, aplicando el teorema de 3.6 con $n_0 = 1$:

(i) La proposición

$$p(n_0) = p(1) = (2^1 > 1) \tag{12}$$

es verdadera, pues $2^1 = 2 > 1$.

(ii) Si es $n \geq 1$, $2^n > n$ implica $2^{n+1} > n + 1$.

En efecto, de $2^n > n$ se deduce, multiplicando ambos miembros por 2, $2 \cdot 2^n > 2n$, o sea $2^{n+1} > 2n$, y esta última desigualdad implica $2^{n+1} > n + 1$ debido a que, para $n \geq 1$, es

$$2n = n + n \geq n + 1. \tag{13}$$

En virtud de (i) y (ii), por el teorema de 3.6 queda probada (10) para todo número natural $n \geq 1$. Esta conclusión, conjuntamente con (11), completa la demostración de que (10) vale para todo número natural.

Nota. La demostración directa de (10) por recurrencia, aplicando el teorema de 3.4, ofrecería más dificultades, pues (13) no es válida para todo número natural n. Por ejemplo

$$2 \cdot 0 > 0 + 1 \text{ es } \textit{falso}.$$

4. Primeras Consecuencias de los Axiomas de Peano

El propósito de todo lo que sigue de este capítulo es mostrar cómo puede construirse la teoría deductiva del número natural a partir de los axiomas de Peano. Haremos, pues, demostraciones apoyándonos exclusivamente en los cinco axiomas de 2 · 2. El lector puede omitir algunas en una primera vista. En 5 y 6 reemplazamos muchas demostraciones por breves indicaciones entre corchetes [ ].[21]

Teorema 1. *Si* $x \neq y$, *entonces* $\text{sig}(x) \neq \text{sig}(y)$.

Demostración. Si fuera $\text{sig}(x) = \text{sig}(y)$ sería, por axioma 4, $x = y$.

Teorema 2. $\text{sig}(x) \neq x$. (O sea: *El siguiente de un número es distinto de él.*)

Demostración. Sea C el conjunto de los números naturales tales que $\text{sig}(x) \neq x$. Se tiene:

(i) Por los axiomas 1 y 3, $\text{sig}(0) \neq 0$, o sea $0 \in C$;

(ii) Si $x \in C$, o sea si $\text{sig}(x) \neq x$, es, por el teorema 1,

$$\text{sig}(\text{sig}(x)) \neq \text{sig}(x), \quad \text{o sea:} \quad \text{sig}(x) \in C.$$

Entonces, por el axioma 5 de Peano, es $C = N$, o sea, para todo $x \in N$ es $\text{sig}(x) \neq x$.

Teorema 3. *Si* $x \neq 0$ *existe un número natural* y *tal que* $x = \mathrm{sig}(y)$.

Demostración. Sea C el conjunto formado por 0 y los números x que verifican el teorema. Es:

(i) $0 \in C$ (trivial);

(ii) Sea $x \in C$. Puesto que $\mathrm{sig}(x) = \mathrm{sig}(x)$, $\mathrm{sig}(x)$ verifica el teorema (con $y = x$), es decir, $\mathrm{sig}(x) \in C$.

Entonces, por axioma 5, es $C = N$, lo que demuestra el teorema.

Teorema 4. *El elemento* y *del teorema* 3 *es único.*

Demostración. Axioma 4.

Notación. Si $x = \mathrm{sig}(y)$ pondremos $y = \mathrm{pr}(x)$, que se lee "y es *precedente* de x".

Escolio. *Para todo* $x \neq 0$ *es* $\mathrm{sig}(\mathrm{pr}(x)) = x$.

5. Suma y Multiplicación

5.1 **Teorema 5.** *Existe una operación binaria en* N, *que a cada par ordenado* (x, y) *de números naturales asigna un número natural indicado* $x + y$, *tal que:*

1) *Para todo* $x \in N$ *es* $x + 0 = x$;

2) *Para todo* $x \in N$ *y todo* $y \in N$, *es* $x + \mathrm{sig}(y) = \mathrm{sig}(x + y)$.

[Para cada x fijo se prueba la unicidad de $x + y$ por inducción en y. Luego, para y fijo, se prueba la existencia de $x + y$ por inducción en x.]

Definición 1. $x + y$ *se llama* *suma* *de* x *e* y.

Teorema 6. Asociatividad de la suma:

$$(x + y) + z = x + (y + z). \tag{14}$$

[x, y fijos, inducción en z.]

Teorema 7. *Conmutatividad de la suma:*

$$x + y = y + x. \tag{15}$$

[y fijo, inducción en x.]

Definición 2. Sea $*$ *una operación binaria en un conjunto* A, *que a cada par ordenado* (x, y) *de elementos de* A *asigna un elemento* $x * y \in A$. *Diremos que* $e \in A$ *es* *elemento neutro* *de la operación si para todo* $x \in A$ *es*

$$x * e = e * x = x. \tag{16}$$

En virtud de los teoremas 5 y 7 es, para todo $x \in N$:

$$x + 0 = 0 + x = x, \tag{17}$$

es decir, 0 es *elemento neutro de la suma* en N.

Teorema 8. *Si* $y \neq z$, *entonces* $x + y \neq x + z$ *para todo* $x \in N$.

[Inducción en x.]

Corolario. *Propiedad cancelativa de la suma:*[22]

$$x + y = x + z \Rightarrow y = z. \tag{18}$$

Teorema 9. *Dados* x *e* y, *ocurre uno y sólo uno de estos casos:*

a) $x = y$;
b) *Existe* $u \neq 0$ *tal que* $x + u = y$;
c) *Existe* $v \neq 0$ *tal que* $x = y + v$.

5.2 **Teorema 10.** *Existe una operación binaria en* N, *que a cada par ordenado* (x, y) *de números naturales asigna un número natural indicado por* $x \cdot y$, *tal que:*

1) *Para todo* $x \in N$ *es* $x \cdot 0 = 0$;

2) *Para todo* $x \in N$ *y todo* $y \in N$ *es* $x \cdot \mathrm{sig}(y) = x \cdot y + x$.

[Demostración análoga paso a paso a la del teorema 5.]

Definición 3. $x \cdot y$ *se llama* *producto* *de* x *e* y; *la operación se llama* *multiplicación*.

Teorema 11. *Propiedad conmutativa de la multiplicación:*

$$x \cdot y = y \cdot x. \tag{19}$$

[y fijo, inducción en x.]

Definición 4. *El número* sig(0) *se llama* <u>uno</u> *y se indica* 1.

Escolio. 1 *es elemento neutro de la multiplicación.*

Demostración. Por teoremas 10, 7 y 5 es:

$$x \cdot 1 = x \cdot \operatorname{sig}(0) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x + 0 = x,$$

y entonces, por teorema 11:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

Teorema 12. *Propiedad distributiva de la multiplicación a la* <u>*izquierda*</u> *respecto de la suma:*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{20}$$

[x e y fijos, inducción en z.]

Escolio. *Propiedad distributiva a derecha:*

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x. \tag{21}$$

Demostración. Teoremas 11 y 12.

Teorema 13. *Propiedad asociativa de la multiplicación:*[23]

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z). \tag{22}$$

[x e y fijos, inducción en z.]

6. Orden

6.1 **Definición 5.** Si $x + u = y$, *diremos que*

$$x \leq y, \quad \text{"}x \text{ \underline{es menor o igual que} } y\text{"}, \tag{23}$$

y si además es $x \neq y$ *(o sea, teorema* 9, $u \neq 0$), *diremos que*

$$x < y, \quad \text{"}x \text{ es \underline{menor} que } y\text{"}. \tag{24}$$

Definición 6. *Las relaciones inversas de las indicadas por* (23) *y* (24) *se indican, respectivamente,* $\geq$ *(*<u>*mayor o igual*</u>*) y* $>$ *(*<u>*mayor*</u>*), de modo que* (23 *y* (24) *equivalen respectivamente a*

$$y \geq x, \text{ "}y \text{ es } \underline{\text{mayor o igual}} \text{ que } x\text{"}, \tag{25}$$

$$y > x, \text{ "}y \text{ es } \underline{\text{mayor}} \text{ que } x\text{"}. \tag{26}$$

Teorema 14. *Dados x e y, se verifica una y sólo una de:*

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x. \tag{27}$$

Demostración. Teorema 9 y definición 5.

Escolio 1. *Dados x e y, se verifica una y sólo una de:*

$$x = y, \quad x < y, \quad x > y. \tag{28}$$

Demostración. Teorema 14 y definición 6.

Escolio 2.

$$x \leq y \text{ e } y \leq x \textit{ implican } x = y. \tag{29}$$

Demostración. Si fuera $x \leq y$ e $y \leq x$, y además $x \neq y$, sería $x < y$ e $y < x$, en contradicción con el teorema 14.

Teorema 15. *Propiedad o ley transitiva de* $\leq$:

$$(x \leq y \text{ e } y \leq z) \Rightarrow x \leq z.$$

Demostración. Si $x \leq y$ e $y \leq z$, por la definición 5 existen u y v tales que:

$$x + u = y, \quad y + v = z.$$

De aquí resulta $(x + u) + v = z$, o sea, por el teorema 6:

$$x + (u + v) = z,$$

y por la definición 5 esta igualdad equivale a

$$x \leq z.$$

6.2 De (17) y la definición 5 se deduce $x \leq x$, y de aquí, (29) y el teorema 15, resulta:

Teorema 16. *La relación $\leq$ tiene las propiedades:*

reflexiva: $x \leq x$;
antisimétrica: $(x \leq y \text{ e } y \leq x) \Rightarrow x = y$;
transitiva: $(x \leq y \text{ e } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Definición 7. *Una relación con las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva se llama relación de orden.*[24]

Escolio. $\leq$ *es una relación de orden.*

6.3 Teorema 17. *Monotonía de la suma. Si*

$$x < y, \quad o \quad x = y, \quad o \quad x > y,$$

entonces, respectivamente,

$$x + z < y + z, \quad o \quad x + z = y + z, \quad o \quad x + z > y + z,$$

y recíprocamente.[25]

Demostración. Hagamos la demostración para $<$. Si $x < y$, por la definición 5 existe $u \neq 0$ tal que

$$x + u = y, \tag{30}$$

de donde

$$(x + u) + z = y + z. \tag{31}$$

Por los teoremas 6 y 7, el primer miembro de (31) se transforma así:

$$(x + u) + z = x + (u + z) = x + (z + u) = (x + z) + u,$$

y entonces

$$(x + z) + u = y + z, \tag{32}$$

o sea

$$x + z < y + z. \tag{33}$$

Recíprocamente, si es válida (33) existe $u \neq 0$ tal que es válida (32), y de aquí, transformando como antes el primer miembro, se deduce (31), de donde sigue (30) por la propiedad de cancelación de la suma (corolario del teorema 8). Finalmente, (30) con $u \neq 0$ equivale a $x < y$ en virtud de la definición 5.

Teorema 18. $x \geq 0$.

Demostración. O bien $x = 0$, o bien existe u tal que $x = \mathrm{sig}(u) = u + 1 \geq 1$, y como además $1 = \mathrm{sig}(0) = 0 + 1 > 0$, resulta $x \geq 0$.

Escolio 1. *Si* $x \neq 0$, *entonces* $x \geq 1$.

Escolio 2. *Si* $y > x$, *entonces* $y \geq x + 1$.

[$y = x + u$, $u \geq 1$, de donde $y \geq x + 1$.]

6.4 Teorema 19 *(de buena ordenación).*[26] *Todo conjunto* A *de números naturales que tenga por lo menos un elemento tiene uno menor que todos los demás.*

Demostración. (Puede omitirse en una primera lectura.)

Consideremos el conjunto B de todos los $x \in N$ que son $\leq$ que todo número del conjunto A. El conjunto B tiene estas propiedades:

(i) 0 *pertenece a* B (por el teorema 18);

(ii) *No todo* x *pertenece a* B. (Pues si $y \in A$, como $y + 1 > y$, y no pertenece a B.)

(iii) *Existe un número* $h \in B$, *tal que* $h + 1$ *no pertenece a* B. (Pues si así no fuera, en virtud de (i) y el axioma 5 *todo* x pertenecería a B, en contradicción con (ii).)

Para probar el teorema bastará demostrar que

$$h \in A.$$

Si esto no fuera cierto, sería para todo k perteneciente a A:

$$h < k,$$

de donde, por el escolio 2 del teorema 18

$$h + 1 \leq k,$$

y entonces sería $h + 1 \in B$, contrariamente a (iii).[27]

6.5 Teorema 20. $(x > 0$ *e* $y > 0) \Rightarrow x \cdot y > 0$.

Demostración. Por el teorema 3, $y = \mathrm{sig}(u)$; entonces, por el teorema 10 y las definiciones 5 y 6,

$$x \cdot y = x \cdot \mathrm{sig}(u) = x \cdot u + x \geq x > 0,$$

y de aquí es fácil deducir

$$x \cdot y > 0.$$

Corolario. *Inexistencia de divisores de cero:*[28]

$$(x \neq 0 \ e \ y \neq 0) \Rightarrow x \cdot y \neq 0. \tag{34}$$

Demostración. Por teorema 18, $\neq 0$ equivale a > 0.

Teorema 21. $(x \neq y \ \text{ y } \ z \neq 0) \Rightarrow z \cdot x \neq z \cdot y$.

Demostración. (i) Si $x > y$ es $x = y + u$ con $u \neq 0$, y entonces, por el teorema 12:

$$z \cdot x = z \cdot (y + u) = z \cdot y + z \cdot u \tag{35}$$

De $z \neq 0$ y $u \neq 0$ se deduce (corolario de teor. 20) $z \cdot u \neq 0$, o sea (teor. 18) $z \cdot u > 0$, y entonces, por (35), $z \cdot x > z \cdot y$.

(ii) Análogamente se procede si $x < y$.

Corolario. *Propiedad de cancelación de la multiplicación:*

$$(z \cdot x = z \cdot y \ \text{ y } \ z \neq 0) \Rightarrow x = y. \tag{36}$$

Es decir: un factor *no nulo* común a ambos miembros de una igualdad puede simplificarse.

Demostración. Si fuera $x \neq y$, sería por el teorema 21 $z \cdot x \neq z \cdot y$.

3

EL NUMERO ENTERO Y EL NUMERO RACIONAL

1. Introducción

1.1 Dados dos números naturales a y b, están unívocamente definidos su ***suma*** $a + b$ y su ***producto*** $a \cdot b$ que son también números naturales. Es decir, la suma y la multiplicación son operaciones en N.

Veamos ahora qué ocurre con la ***operación inversa*** de la suma.

Dados dos números a y b, se llama ***diferencia*** o ***resta*** $a - b$ (a menos b) de ***minuendo*** a y ***sustraendo*** b, a todo número x, ***si existe,*** que sumado con el sustraendo b da por suma el minuendo a. O sea (confróntese cap. 1-2.1):

$$a - b = x \text{ significa que } x + b = a. \qquad (1)$$

Pero ocurre que la ecuación en x dada por (1), $x + b = a$, ***no siempre tiene solución en los números naturales,*** si bien cuando la tiene es única. Se dice por ello que la resta es una "operación parcialmente definida" en el conjunto N de los números naturales. Por ejemplo,

$$2 - 7 \text{ ***no existe*** en el conjunto N,}$$

pues no hay ningún número ***natural*** x tal que $x + 7 = 2$.

1.2 Como se acaba de ver, la diferencia

$$a - b, \quad (a, b \in \mathrm{N}), \qquad (2)$$

no siempre tiene sentido en N; pero cuando están definidas las diferencias $a - b$ y $c - d$ es

$$a - b = c - d \text{ si, y sólo si, } a + d = b + c. \tag{3}$$

(Por ejemplo, la igualdad $4 - 2 = 8 - 6$ equivale a la igualdad $4 + 6 = 8 + 2$ obtenida "pasando" 6 al primer miembro y 2 al segundo.)

Se presenta entonces, en forma natural, esta idea:

Reemplacemos la expresión $a - b$ por un par ordenado

$$(a, b), \quad (a, b \in \mathrm{N}), \tag{2'}$$

y llamemos ***equivalentes*** a dos pares ordenados (a, b) y (c, d), lo que se denota $(a, b) \sim (c, d)$ si, y sólo si, $a + d = b + c$.

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si, y sólo si, } a + d = b + c. \tag{3'}$$

Asimismo, cuando están definidas en N las diferencias, es

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d), \tag{4}$$

$$(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc), \tag{5}$$

y entonces será oportuno definir la ***suma*** y el ***producto*** de ***pares ordenados,*** respectivamente, por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, \quad b + d), \tag{4'}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, \ ad + bc). \tag{5'}$$

1.3 Veremos ahora cómo, gracias a haber elegido las definiciones (3'), (4') y (5'), no en forma arbitraria, sino por los motivos dichos en 1.2, se logra ampliar el conjunto N de los números naturales mediante la definición de nuevos números, de suerte que en el conjunto más amplio Z (de los números *enteros):*

(i) Puedan definirse dos operaciones, *suma* y *multiplicación,* cuyos resultados coinciden con las correspondientes operaciones en N cuando los elementos de Z a los cuales se aplican son números naturales;

(ii) Se conserven las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación demostradas en el capítulo 2-5 para números naturales *(permanencia de las leyes formales);*

(iii) Pueda definirse la ***resta*** mediante (1), pero ahora como operación binaria (totalmente definida) en Z.[29]

2. Relaciones de Equivalencia

2.1 Recordemos (0.3 h) que una relación R en un conjunto A (o sea, de A en A), es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$: $R \subset A \times A$. Si un para ordenado (x, y) de $A \times A$ pertenece a la relación R, $(x, y) \in R$, se escribe también $x R y$, que se lee "x está en la relación R con y".

Definición. *Una relación* R *en* A *se llama* *<u>relación de equivalencia</u>* *si tiene las propiedades:*

reflexiva: $x \in A \Rightarrow x R x$
simétrica: $x R y \Rightarrow y R x$
transitiva: $(x R y \text{ e } y R z) \Rightarrow x R z.$

2.2 Ejemplos. a. Entre los elementos de un conjunto dado A, la ***igualdad*** es una relación de equivalencia, pues:

$$x = x, \quad x = y \Rightarrow y = x, \quad (x = y \text{ e } y = z) \Rightarrow x = z.$$

b. En el conjunto A de todas las figuras de un plano, la ***congruencia*** es una relación de equivalencia. También lo es la ***semejanza*** si se la define en sentido amplio, conviniendo en considerar semejantes también a dos figuras congruentes.

c. En el conjunto A de todas las rectas, el ***paralelismo*** es una relación de equivalencia si se lo define en sentido amplio, conviniendo en considerar paralelas también a una recta r y ella misma: $r \parallel r$.

d. La perpendicularidad no es una relación de equivalencia, pues no es reflexiva ni transitiva.

2.3 Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, a cada elemento a de A le podemos asociar el conjunto C_a de todos los elementos x de A relacionados por R con a. Este conjunto se expresa por comprensión así:

$$C_a = \{x \mid x \in A \quad y \quad x R a\}, \tag{6}$$

y se llama ***clase de equivalencia de*** a ***respecto de*** R.

Por ejemplo, en el paralelismo de rectas (2.2 b) la clase de equivalencia C_a de una recta a es el conjunto de todas las rectas paralelas a a.

Se demuestra que si dos clases de equivalencia tienen un elemento común coinciden:

$$(x \in C_a \text{ y } x \in C_b) \Rightarrow C_a = C_b.$$

En consecuencia, dos clases de equivalencia diferentes son *disjuntas*, es decir, sin elementos comunes. Además, todo elemento a del conjunto A pertenece a alguna clase de equivalencia, pues por ser $a R a$ se tiene $a \in C_a$.

Entonces, las clases de equivalencia son dos a dos disjuntas, y la unión de todas ellas es el conjunto A. En otras palabras, todo elemento x del conjunto A pertenece a una clase de equivalencia y sólo a una. Se expresa esto diciendo que las clases de equivalencia forman una *partición* del conjunto A.

3. Definiciones por Abstracción

3.1 Este tipo de definición se encuentra en la vida diaria a cada instante. Quien ve una fotografía y una de sus ampliaciones suele decir que se trata de una sola fotografía, por suponer sin duda que se ha hecho un solo negativo. Las dos figuras tienen de común "algo a lo que llegamos *haciendo abstracción* de tamaño, color, etc.", y que llamamos *forma*. La frase entre comillas no es un modelo de precisión, pero veremos cómo se formaliza todo esto mediante una *relación de equivalencia:* la *semejanza* de figuras (2.2 b).

La semejanza divide o clasifica las figuras en *clases de equivalencia* (2.3) formadas por figuras semejantes entre sí. Esto permite dar una definición de *forma por abstracción,* reduciéndola a una definición explícita:

<u>Forma</u> de una figura es su clase de equivalencia respecto de la semejanza.

Entonces: Dos figuras tienen *la misma forma* si pertenecen a la misma clase de equivalencia, es decir, *si son semejantes.*

3.2 La *dirección de una recta* se define por abstracción partiendo de la base del paralelismo de rectas, que es una relación de equivalencia (2.2 c). Dos rectas a y b tienen *la misma dirección* si pertenecen a la misma clase de equivalencia, es decir, *si son paralelas:* $a \parallel b$.

Consideremos la relación de perpendicularidad de rectas:

$a \perp b$ (a es perpendicular a b).

Al reemplazar a y b por otras rectas a' y b' respectivamente paralelas a las anteriores, las nuevas rectas siguen siendo perpendiculares, es decir,

$$(a \perp b, \quad a' \parallel a, \quad \text{y} \quad b' \parallel b) \Rightarrow a' \perp b', \tag{7}$$

por lo cual diremos que *la perpendicularidad es invariante respecto de la relación de paralelismo.*

Gracias a esta invariancia tiene sentido la definición siguiente:

Definición. *Diremos que dos* *__direcciones__* D_1 *y* D_2 (Fig. 20) *son* *__perpendiculares,__* *si lo son dos rectas cualesquiera de tales direcciones.*

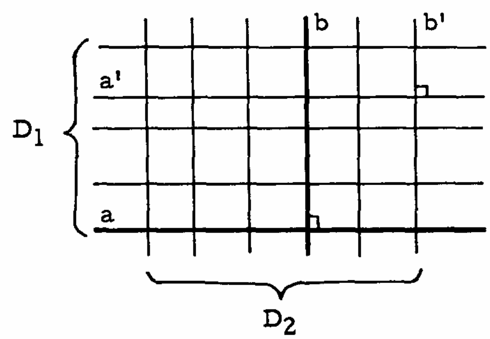


Fig. 20

Vemos aquí cómo, para definir una relación (perpendicularidad) entre clases de equivalencia (direcciones), se elige en cada clase un elemento o *representante*. Gracias a la invariancia (7) la perpendicularidad entre elementos (rectas) implica una *relación entre clases,* que seguimos llamando "perpendicularidad".

De modo análogo, a partir de *operaciones entre números* definiremos *operaciones entre clases de equivalencia* de números.

4. Números Enteros. Suma y Diferencia

4.1 **Teorema.** *La relación* $\sim$ *entre pares ordenados de números naturales definida por* (3') *es una relación de equivalencia, es decir, tiene las propiedades:*

reflexiva: $(a, b) \sim (a, b)$ (8)

simétrica: $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ (9)

transitiva: $(a, b) \sim (c, d)$ *y* $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$. (10)

Demostración. Se cumple (8), pues $a + b = b + a$ (la suma de números naturales es conmutativa; cap. 2-5.1, teor. 7).

Se cumple (9), pues $a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a$.

Se cumple (10), pues de las igualdades

$$a + d = b + c \quad \text{y} \quad c + f = d + e$$

resulta, sumando miembro a miembro y cancelando términos:

$$a + f = b + e,$$

y esta igualdad equivale a $(a, b) \sim (e, f)$.

4.2 Por ser $\sim$ una relación de equivalencia da una *partición* del conjunto $N \times N$ de los pares ordenados de números naturales en *clases de equivalencia* (2.3), o sea una clasificación de estos pares ordenados. Indicaremos la clase de equivalencia de un par ordenado (a, b) por $[a, b]$, de modo que:

$$[a, b] = [c, d] \text{ equivale a } (a, b) \sim (c, d), \tag{11}$$

o sea, en virtud de (3'):

$$[a, b] = [c, d] \text{ equivale a } a + d = b + c. \tag{12}$$

Cada una de estas clases de equivalencia se llama *número entero*.

4.3 Podemos dar una *representación gráfica de esta partición en clases de equivalencia*, en la cual los pares $(a, b) \in N \times N$ se representan por los puntos de coordenadas enteras de un cuadrante, y las clases de equivalencia $[a, b]$ son subconjuntos formados por los puntos del reticulado pertenecientes a ciertas rectas (Fig. 21).

4.4 La suma de pares ordenados definida en (4') tiene esta importante propiedad (confróntese 3.2):

Teorema. *Al cambiar un sumando por un par equivalente, otro tanto ocurre con la suma.*

Demostración. Consideremos las sumas (4') y

$$(a', b') + (c, d) = (a' + c, b' + d),$$

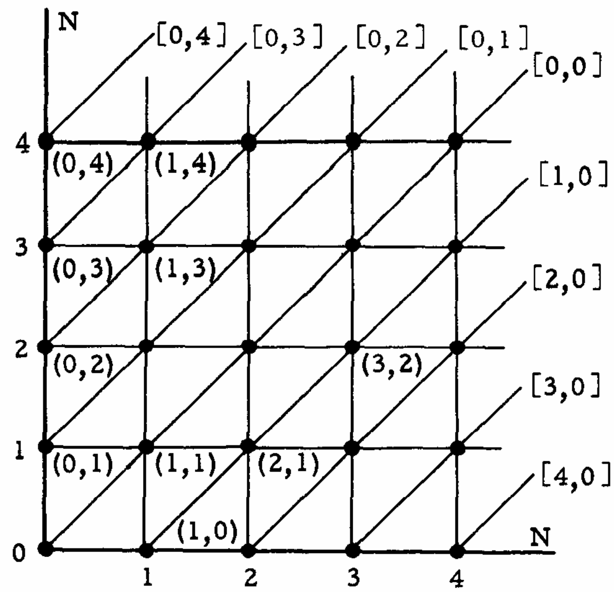


Fig. 21. $(1,0) \sim (2,1) \sim (3,2)$, o sea $[1,0] = [2,1] = [3,2]$.

con $(a', b') \sim (a, b)$, es decir, con

$$a' + b = b' + a. \tag{13}$$

Debemos demostrar que los resultados son pares ordenados equivalentes:

$$(a' + c, \ b' + d) \sim (a + c, \ b + d),$$

o sea, que

$$a' + c + b + d = b' + d + a + c.$$

Ahora bien, esta igualdad es verdadera, pues se deduce de (13) sumando $c + d$ a ambos miembros.

4.5 Consecuencia del teorema anterior es que se puede definir la ***suma de enteros***, o sea, de clases de equivalencia,

$$[a, b] + [c, d], \tag{14}$$

como la clase de equivalencia a la cual pertenece el segundo miembro de (4'). Esto es posible (confróntese 3.2) porque la clase es independiente de los representantes elegidos para las clases $[a, b]$ y $[c, d]$. Es legítimo, pues, poner como definición:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, \; b + d]. \tag{15}$$

Ejemplo

$$[6, 3] + [2, 4] = [8, 7].$$

Los sumandos pueden escribirse también, respectivamente, $[3, 0]$ y $[0, 2]$ (por ejemplo, $[6, 3] = [3, 0]$, pues $6 + 0 = 3 + 3$) y entonces la suma es:

$$[3, 0] + [0, 2] = [3, 2].$$

Los resultados $[8, 7]$ y $[3, 2]$ son iguales (es decir, la misma clase de equivalencia) pues $8 + 2 = 7 + 3$.

4.6 Nota. Para comprender mejor lo dicho en 4.5 veamos un contraejemplo. La siguiente operación entre pares ordenados:

$$(a, b) * (c, d) = (a + d, \; bc), \tag{16}$$

no es extensible a las clases de equivalencia de la relación definida por (3'). En efecto, para todo $h \in N$ es $(a, b) \sim (a + h, \; b + h)$; por otra parte es

$$(a + h, \; b + h) * (c, d) = (a + h + d, \; bc + hc), \tag{17}$$

y ambos resultados (16) y (17) no pertenecen, en general, a la misma clase de equivalencia. Entonces, la operación $*$ no es invariante respecto de $\sim$ y no induce una operación entre clases respecto de $*$.

4.7 La ***diferencia*** o ***resta de enteros*** se define como en (1), por la condición de que

$$\text{significa que:} \quad \left.\begin{array}{l} [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [x_1, x_2] \\ [x_1, x_2] + [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \end{array}\right\} \tag{18}$$

y será una ***operación binaria*** en Z [30] si la segunda ecuación (18) tiene solución única $[x_1, x_2]$ en todos los casos (es decir, cualesquiera que sean los enteros $[a_1, a_2]$ y $[b_1, b_2]$). Se demuestra que, en efecto, es así.[31]

5. Multiplicación de Enteros

5.1 La multiplicación de pares ordenados, definida en (5'), tiene esta importante propiedad (confróntese 4.4):

Teorema. *Al cambiar un factor por un par equivalente, otro tanto ocurre con el producto.*

Demostración. Consideremos los productos (5') y

$$(a', b') \cdot (c, d) = (a'c + b'd, \ a'd + b'c),$$

con $(a', b') \sim (a, b)$, es decir, con

$$a' + b = b' + a. \tag{19}$$

Debemos demostrar que los resultados son pares ordenados equivalentes:

$$(ac + bd, \ ad + bc) \sim (a'c + b'd, \ a'd + b'c),$$

o sea, que

$$ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd. \tag{20}$$

Ahora bien, multiplicando ambos miembros de la igualdad (19) por d, y ambos miembros por c, se obtienen las igualdades:

$$a'd + bd = b'd + ad,$$
$$b'c + ac = a'c + bc,$$

y sumando miembro a miembro estas igualdades, se obtiene la igualdad (20), con lo cual queda demostrado el teorema.

5.2 (Confróntese 4.5) Consecuencia de este teorema es que podemos definir la *multiplicación de enteros*, o sea de clases de equivalencia

$$[a, b] \cdot [c, d] \tag{21}$$

como la clase de equivalencia del segundo miembro de (5'). Ello es posible porque esta clase es *independiente de los representantes* elegidos para las clases $[a,b]$ y $[c,d]$. Es legítimo, pues, poner:

$$[a,b] \cdot [c,d] = [ac + bd, \ ad + bc]. \tag{22}$$

6. Propiedades de las Operaciones con Enteros

Definidas mediante (15) y (22) la suma y la multiplicación de enteros, la verificación de sus respectivas propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, etc., es simple tarea de rutina. Hagámoslo sólo para la asociatividad de la suma y la conmutatividad de la multiplicación, y notemos que deben aplicarse las propiedades análogas ya demostradas en el capítulo 2 para las operaciones *con números naturales* (pasos del tercer miembro al cuarto, y del segundo al tercero, respectivamente):

$$([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) + [c_1, c_2] = [a_1 + b_1,\ a_2 + b_2] + [c_1,\ c_2] =$$

$$= [(a_1 + b_1) + c_1,\ (a_2 + b_2) + c_2] =$$

$$= [a_1 + (b_1 + c_1),\ a_2 + (b_2 + c_2)] = [a_1, a_2] +$$

$$+ [b_1 + c_1,\ b_2 + c_2] =$$

$$= [a_1, a_2] + ([b_1, b_2] + [c_1, c_2]);$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd,\ ad + bc] = [ca + db,\ da + cb] =$$

$$= [ca + db,\ cb + da] = [c, d] \cdot [a, b].$$

7. Los Enteros como Ampliación de los Números Naturales

7.1 Las definiciones (15) y (22) de suma y de multiplicación de enteros dan para $b = d = 0$:

$$[a, 0] + [c, 0] = [a + c,\ 0],$$

$$[a, 0] \cdot [c, 0] = [a \cdot c,\ 0],$$

es decir, las clases (números enteros) que pueden escribirse en la forma $[a, 0]$, $[c, 0]$ --con segundo componente cero-- se comportan respecto de las operaciones de suma y de multiplicación, como los números naturales a y c que figuran como primeros componentes. En otras palabras, para efectuar las operaciones de suma y de multiplicación con números *enteros* representados por pares con *segundo componente nulo,* se efectúan las correspondientes operaciones con los números *naturales* que figuran como primeros componentes.

Por esta razón podemos convenir en identificar[32] cada *entero* $[a, 0]$ con el número *natural* a o primer componente del par. Con este convenio, el conjunto N de los números naturales es una parte del conjunto Z de los enteros:

$$N \subset Z,$$

y además queda satisfecho el requisito (i) de 1.3.

Observemos en la figura 21 que a cada clase de equivalencia de la forma $[a, 0]$ corresponde una recta que corta al "eje de abscisas" en el punto que representa al número natural a.

7.2 He aquí una propiedad importante que puede advertirse en la figura 21:

Todo número entero o clase de equivalencia de pares ordenados puede representarse de una sola manera en una de las formas:

$$[c, 0] \text{ con } c \in \mathrm{N}, \tag{23}$$

o

$$[0, c] \text{ con } c \in \mathrm{N} \text{ y } c \neq 0.^{(33)} \tag{24}$$

7.3 Reformulemos la propiedad señalada en 7.2 así:

Dado un entero, se lo puede representar en una, y sólo una, de las formas (23) o (24), y en ambos casos mediante un número natural c unívocamente determinado.

Si el entero se representa en la forma (23) se llama

entero no negativo $[c, 0]$,

y puesto que se identifica, como vimos en 7.1, con el

número natural c,

se llama también

entero no negativo c.

En este caso pondremos también $[c, 0] = c$. Por ejemplo:

$$[3, 0] = 3, \quad [0, 0] = 0.$$

Si el número entero se representa en la forma (24) se llama

entero negativo $[0, c]$,

y se representa por

$$-c.$$

Con estas notaciones podemos indicar el conjunto Z de los números enteros en la forma:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{25}$$

7.4 Poniendo, para x e y enteros, $x \leq y$ si, y sólo si, existe un entero no negativo u tal que $x + u = y$ (confróntese capítulo 2-6.1) se define en Z una relación $\leq$ que puede demostrarse es una relación de orden (véase capítulo 2-6.2).

8. Propiedades de Z

8.1 Sin entrar en detalles, señalemos aquí que todas las propiedades del conjunto Z de los números enteros con relación a las operaciones enteras (suma, resta y multiplicación) pueden demostrarse a partir de un número relativamente pequeño de propiedades muy sencillas, que ahora enunciaremos:

Propiedades algebraicas de Z

a. En el conjunto Z de los números enteros existe una operación +, llamada ***suma***, que cumple las leyes:[34]

a_1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$

a_2. Conmutativa: $x + y = y + x$

a_3. Hay un número entero 0 (cero), que es ***elemento neutro de la suma***, es decir (capítulo 2-5.1, def. 2), para todo entero x verifica:

$$0 + x = x + 0 = x \tag{26}$$

a_4. Para cada entero x hay un entero llamado ***opuesto*** de x indicado por $-x$, tal que:

$$x + (-x) = 0 \tag{27}$$

b. En el conjunto Z de los números enteros puede definirse una operación llamada ***multiplicación***, que cumple las leyes:

b_1. Asociativa: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

b_2. Conmutativa: $x \cdot y = y \cdot x$

b_3. Hay un número entero 1 (uno) que es ***elemento neutro de la multiplicación***, es decir, para todo entero x verifica:

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x \tag{28}$$

Es $1 \neq 0$.

c. Las operaciones de suma y de multiplicación están relacionadas por la propiedad siguiente: [35]

Distributiva: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

8.2 *Primeras consecuencias de las propiedades algebraicas*

Para comprender mejor lo dicho al comienzo de 8.1, veamos cómo, usando ***solamente*** las propiedades allí enumeradas, se deducen algunas de las conocidas propiedades de los números enteros en relación con las operaciones enteras.

Teorema 1. *Propiedad cancelativa de la suma* (confróntese capítulo 2-5.1, cor. de teor. 8):

$$x + y = x + z \Rightarrow y = z. \tag{29}$$

Demostración. Se tiene:

$$x + y = x + z \Rightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z)$$

$$\Rightarrow (-x + x) + y = (-x + x) + z \qquad \text{(por } a_1\text{),}$$

$$\Rightarrow 0 + y = 0 + z \qquad \text{(por } a_4\text{),}$$

$$\Rightarrow y = z \qquad \text{(por } a_3\text{).}$$

Teorema 2. *Ley de absorción del cero* (confróntese capítulo 2-5.2, teor. 10):

$$x \cdot 0 = 0. \tag{30}$$

Demostración

$$x \cdot x + 0 = x \cdot x = x \cdot (x + 0) \qquad \text{(por } a_3\text{, 2 veces),}$$

$$= x \cdot x + x \cdot 0 \qquad \text{(por c).}$$

De $x \,.\, x + 0 = x \,.\, x + x \,.\, 0$, por teorema 1, se deduce (30).

Teorema 3

$$-(-x) = x. \tag{31}$$

Demostración. De (27) se deduce, por a_2,

$$(-x) + x = 0,$$

es decir, el opuesto de $-x$ es x.

Teorema 4. *Regla de los signos:*[36]

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y), \qquad (-x) \cdot y = -(x \cdot y), \tag{32}$$

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y. \tag{33}$$

Demostración. Para (32). Por b_2 basta demostrar la 1ª. Es:

$$y + (-y) = 0 \qquad \text{(por } a_4\text{)},$$

$$\Rightarrow x \cdot (y + (-y)) = 0 \qquad \text{(por teor. 2)},$$

$$\Rightarrow x \cdot y + x \cdot (-y) = 0 \qquad \text{(por c)},$$

$$\Rightarrow x \cdot (-y) = -(x \cdot y) \qquad \text{(por } a_4\text{)}.$$

Para (33):

$$(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y)) \qquad \text{(por (32), 2 veces)}$$

$$= x \cdot y \qquad \text{(por (31))}.$$

8.3 Las propiedades de Z con referencia al orden $\leq$ pueden deducirse de un corto número de propiedades sencillas, que agruparemos en dos clases:

I. *Propiedades de orden*

Entre los números enteros hay una relación $\leq$ (menor o igual que), con estas propiedades:

a. $\leq$ es una ***relación de orden,*** es decir (cap. 2-6.2, def. 7), es:

a_1. Reflexiva: $x \leq x$

a_2. Antisimétrica: $(x \leq y$ e $y \leq x) \Rightarrow x = y$

a_3. Transitiva: $(x \leq y$ e $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

b. El orden $\leq$ es ***total*** o ***lineal,*** es decir: Dados dos enteros cualesquiera x e y, es $x \leq y$ ó $y \leq x$.[37]

II. *Relación del orden* $\leq$ *con la estructura algebraica*[38]

a. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

b. $(0 \leq x$ y $0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

8.4 *Primeras consecuencias*

Veamos ahora cómo se deducen algunas de las conocidas propiedades de los números enteros con relación al orden $\leq$, utilizando solamente las propiedades fundamentales ya enunciadas.

Teorema 5. $x \leq y$ *es equivalente a* $x + z \leq y + z$.

Demostración

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \qquad \text{(por IIa)},$$

$$\Rightarrow (x + z) + (-z) \leq (y + z) + (-z) \qquad \text{(por IIa)},$$

$$\Rightarrow x + (z + (-z)) \leq y + (z + (-z)) \qquad \text{(por } b_1\text{)},$$

$$\Rightarrow x \leq y \qquad \text{(por } a_4 \text{ y } a_3\text{)}.$$

Definición. $x - y = x + (-y)$.

Teorema 6. $x \leq y, \quad 0 \leq y - x, \quad x - y \leq 0, \quad -y \leq -x$ *son equivalentes.*

Demostración. Resulta del teorema 5 tomando allí, sucesivamente:

$$z = -x, \quad z = -y, \quad z = -x - y.$$

Teorema 7. *Si* $0 \leq z$, *entonces* $x \leq y$ *implica* $z \cdot x \leq z \cdot y$.

Demostración

$$x \leq y \Rightarrow 0 \leq y - x \qquad \text{(por teor. 6)},$$

$$\Rightarrow 0 \leq z \cdot (y - x) = z \cdot y + z \cdot (-x) \qquad \text{(por IIb)},$$

$$= z \cdot y - z \cdot x \qquad \text{(por (31))},$$

$$\Rightarrow z \cdot x \leq z \cdot y \qquad \text{(por teor. 6)}.$$

Teorema 8

$$(x \leq 0 \;\; y \;\; 0 \leq y) \Rightarrow x \cdot y \leq 0, \tag{34}$$

$$(x \leq 0 \;\; e \;\; y \leq 0) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y. \tag{35}$$

Demostración. Resulta de IIb, (32) y (33).

Corolario 1. $0 \leq x^2$.

Demostración. Si $0 \leq x$, el corolario sigue de IIb con $y = x$. Si $x \leq 0$, sigue de (35) con $y = x$.

Corolario 2. $0 < 1$.

Demostración. Por corolario 1 y b_3, es $0 \leq 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$, o sea $0 \leq 1$, y como, por b_3, $0 \neq 1$, es $0 < 1$.

9. El Número Racional

9.1 Hemos visto que la *suma,* la *resta* y la *multiplicación* son operaciones (siempre definidas) en Z.[39] Veamos ahora qué ocurre con la operación inversa de la multiplicación.

Dados dos números a y b con $b \neq 0$, se llama *cociente* $a \div b$ (a dividido por b) de dividendo a y divisor b, a todo número x, si lo hay, tal que multiplicado por el divisor da como resultado el dividendo:

$$a \div b = x \text{ significa que } x \cdot b = a. \tag{36}$$

Por ejemplo, $12 \div 3 = 4$, *pues* $4 \cdot 3 = 12$.

Pero ocurre que la ecuación en x dada por la segunda igualdad en (36) no tiene siempre solución en Z (números enteros), si bien cuando la tiene, esta solución es única. Por ejemplo, $12 \div 5$ no existe en el conjunto Z, pues no hay ningún número *entero* x, tal que $x \cdot 5 = 12$. Entonces $\div$ no es una operación en Z.[40] Se dice que $\div$ es una "operación parcialmente definida" en Z (confróntese 1.1).

9.2 (Confróntese 1.2). El cociente

$$a \div b, \quad (a, b \in \mathrm{Z}, \quad b \neq 0), \tag{37}$$

no siempre tiene sentido en Z, pero cuando están definidos los cocientes, es

$$a \div b = c \div d \text{ si, y sólo si, } a \cdot d = b \cdot c. \tag{38}$$

Por ejemplo, la igualdad $12 \div 6 = 4 \div 2$ equivale a la igualdad $12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$, que se obtiene "pasando" 2 al primer miembro y 6 al segundo.

Se presenta entonces, en forma natural, esta idea:

Reemplacemos la expresión $a \div b$ por un par ordenado (con segunda componente no nula) que ahora indicaremos

$$a/b, \qquad (a, b \in \mathrm{Z}, \qquad b \neq 0) \tag{37'}$$

y llamaremos ***fracción***, y llamemos ***equivalentes*** a dos pares ordenados a/b y c/d, denotando $a/b \approx c/d$, si, y sólo si, $a \cdot b = {}$ $= b \cdot c$:

$$a/b \approx c/d, \text{ si, y sólo si, } \quad a \cdot d = b \cdot c. \tag{38'}$$

Asimismo, cuando están definidos en Z los cocientes, es

$$(a \div b) + (c \div d) = (ad + bc) \div (bd) \tag{39}$$

y

$$(a \div b) \cdot (c \div d) = (ac) \div (bd), \tag{40}$$

y entonces será oportuno definir la *suma* y el *producto* de *pares ordenados* como a/b y c/d, respectivamente por:

$$(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd) \tag{39'}$$

y

$$(a/b) \cdot (c/d) = (ac)/(bd). \tag{40'}$$

9.3 (Confróntese 1.3). Notemos la estrecha semejanza de los desarrollos anteriores con los de 1.1 y 1.2. También ahora podemos ver cómo, gracias a haber elegido las definiciones (38'), (39') y (40'), no en forma arbitraria sino por los motivos dichos en 9.2, lograremos ampliar el conjunto Z de los números enteros mediante la definición de nuevos números, de suerte que en el conjunto más amplio Q (de los números *racionales*):

(i) Puedan definirse las operaciones que hemos llamado ***enteras*** (es decir, la *suma*, la ***resta*** y la *multiplicación*) de modo que sus resultados coincidan con los de estas operaciones en Z cuando los elementos de Q a los cuales se aplican son números enteros;

(ii) Se conserven las propiedades de las operaciones enteras mencionadas en 6 y 8 para números enteros *(permanencia de las leyes formales)*;

(iii) Pueda definirse el *cociente* mediante (36), y ahora como operación binaria (totalmente definida) en Q.[41]

9.4 (Confróntese 4.1). **Teorema.** *La relación* $\approx$ *entre pares ordenados* a/b, c/d, ... *de números enteros definida por* (38'), *es una relación de equivalencia, es decir* (véase 2), *tiene las propiedades:*

reflexiva: $a/b \approx a/b$ (41)

simétrica: $a/b \approx c/d \Rightarrow c/d \approx a/b$ (42)

transitiva: $a/b \approx c/d$ y $c/d \approx e/f \Rightarrow a/b \approx e/f.$ (43)

Demostración. Se cumple (41), pues $a \cdot b = b \cdot a$ (la multiplicación de números enteros es conmutativa; véase 6).

Se cumple (42), pues $ad = bc \Rightarrow cb = da.$

Se cumple (43), pues de

$$ad = bc \quad \text{y} \quad cf = de$$

resulta, multiplicando miembro a miembro y cancelando factores,

$$af = be,$$

y esta igualdad equivale a $a/b \approx e/f$.

9.5 (Confróntese 4.2). Por ser $\approx$ una relación de equivalencia, da una *partición* o *clasificación* del conjunto de las fracciones en *clases* de equivalencia (2.3). Indicaremos la clase de equivalencia del par ordenado a/b por $\frac{a}{b}$, de modo que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{equivale a} \quad a/b \approx c/d, \tag{44}$$

o sea, en virtud de (38'):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{equivale a} \quad a \cdot d = b \cdot c. \tag{45}$$

Cada una de estas clases de equivalencia se llama *número racional*.

9.6 (Confróntese 4.3). Podemos dar una *representación gráfica de esta partición en clases de equivalencia,* en la cual los pares a/b (elementos del producto cartesiano Z × Z con segunda componente no nula) se representan por puntos de coordenadas enteras del plano, y las clases de equivalencia $\frac{a}{b}$ son subconjuntos formados por los puntos del reticulado pertenecientes a rectas que pasan por el origen, con excepción del eje de ordenadas (Fig. 22).

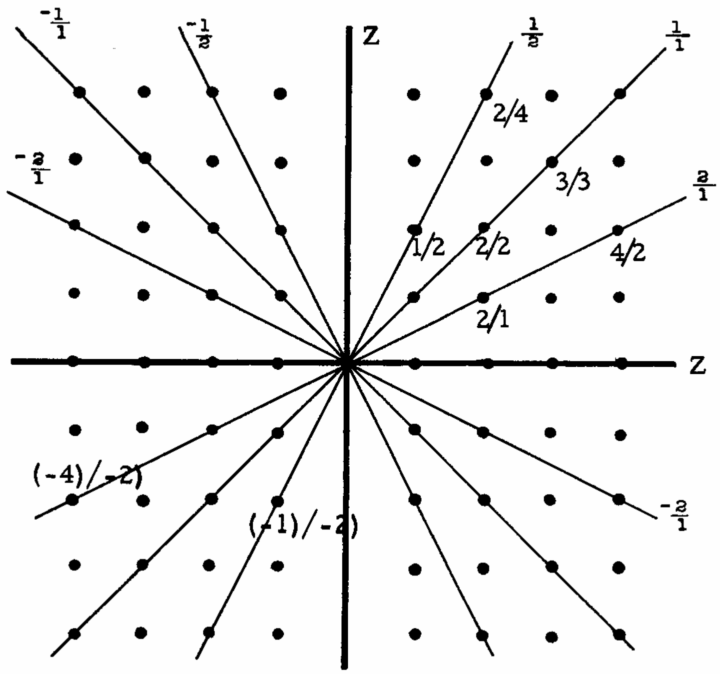


Fig. 22. $1/2 \approx 2/4 \approx (-1)/(-2)$, o sea $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2}$.

10. Operaciones con Números Racionales

10.1 (Confróntese 4.4). La suma de pares ordenados a/b, c/d, ... definida en (39') tiene esta importante propiedad:

Teorema. *Al cambiar un sumando por un par equivalente, otro tanto ocurre con la suma.*

Demostración. Consideremos las sumas (39') y

$$(a'/b') + (c/d) = (a'd + b'c)/(b'd),$$

con $a'/b' \approx a/b$, es decir, con

$$a'b = b'a. \tag{46}$$

Debemos demostrar que los resultados son pares ordenados equivalentes:

$$(ad + bc) / (bd) \approx (a'd + b'c) / (b'd),$$

o sea, que

$$(ad + bc) \cdot (b'd) = (bd) \cdot (a'd + b'c).$$

Ahora bien, esta igualdad, que también se puede escribir (en virtud de la ley distributiva respecto de la suma y de la conmutativa de la multiplicación)

$$b'ad^2 + bb'cd = a'bd^2 + bb'cd,$$

es verdadera, pues resulta de (46) multiplicando ambos miembros por d^2 y sumando luego a ambos, $bb'cd$.

10.2 (Confróntese 4.5). Consecuencia del teorema anterior es que se puede definir la suma de números racionales, o sea de clases de equivalencia respecto de $\approx$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \tag{47}$$

como la clase de equivalencia a la cual pertenece el segundo miembro de (39'). Esto es posible porque la clase es *independiente de los representantes* elegidos para las clases $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Es legítimo, pues, poner como definición:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} . \tag{48}$$

10.3 (Confróntese 4.7). La ***diferencia*** o ***resta*** de números racionales se define como en (1), por la condición de que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \tag{49}$$

significa que

$$\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \tag{50}$$

y se prueba que la diferencia es una ***operación*** (siempre definida) *en* Q, es decir, que dados dos números racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, *hay siempre* un ***único*** número racional $\frac{x}{y}$ que verifica la ecuación (50).

Limitémonos aquí a verificar que este número es $\frac{ad - bc}{bd}$, es decir, que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}. \tag{51}$$

En efecto, en virtud de la definición (48) y de las propiedades de las operaciones con enteros, se tiene:

$$\frac{ad - bc}{bd} + \frac{c}{d} = \frac{(ad - bc)d - (bd)c}{(bd)d} = \frac{ad^2 - bcd + bdc}{bd^2} = \frac{ad^2}{bd^2}$$

y además es

$$\frac{ad^2}{bd^2} = \frac{a}{b},$$

o sea $(ad^2)/(bd^2) \approx a/b$, pues $(ad^2)b = (bd^2)a$.

10.4 (Confróntese 5.1). La multiplicación de pares ordenados a/b, c/d, ... definida en (40') tiene esta importante propiedad:

Teorema. *Al cambiar un factor por un par equivalente, otro tanto ocurre con el producto.*

Demostración. Consideremos los productos (40') y

$$(a'/b') \cdot (c/d) = (a'c)/(b'd),$$

con $a'/b' \approx a/b$, es decir, con

$$a'b = b'a. \tag{52}$$

Debemos demostrar que los resultados son pares ordenados equivalentes:

$$(ac)/(bd) \approx (a'c)/(b'd),$$

o sea, que

$$(ac) \cdot (b'd) = (bd) \cdot (a'c).$$

Ahora bien, esta igualdad, que también se puede escribir (en virtud de propiedades de la multiplicación *de enteros)*:

$$b'acd = a'bcd,$$

es verdadera, pues resulta de multiplicar ambos miembros de (52) por cd.

10.5 (Confróntese 5.2). Consecuencia del teorema anterior es que se puede definir la *multiplicación de números racionales*, o sea, de clases de equivalencia respecto de $\approx$,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}, \tag{53}$$

como la clase de equivalencia a la cual pertenece el segundo miembro de (40'). Esto es posible porque la clase es *independiente de los representantes* elegidos para las clases $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Es legítimo, pues, poner como definición:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \tag{54}$$

10.6 Volvamos a la consideración de los pares ordenados a/b ($a, b \in Z$ y $b \neq 0$), y notemos que:

Todos los pares de la forma $0/h$ *son equivalentes.*

O sea, cualesquiera que sean los enteros no nulos h y k, es

$$0/h \approx 0/k.$$

En efecto, es $0 \cdot k = h \cdot 0$, pues ambos miembros son 0 en virtud de la ley de absorción del cero, válida en Z.

En consecuencia, el número racional

$$\frac{0}{h} \tag{55}$$

es el mismo cualquiera que sea el entero no nulo h. Lo llamaremos "racional cero", y veamos que es elemento neutro de la suma, o sea (capítulo 2-5.1, def. 2), que

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{h} = \frac{a}{b}. \tag{56}$$

En efecto, en virtud de la definición (48) de suma en Q, y de las propiedades de las operaciones en Z, se tiene

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{h} = \frac{a \cdot h + 0 \cdot b}{b \cdot h} = \frac{ah}{bh}$$

y además $\frac{ah}{bh} = \frac{a}{b}$, es decir, $ah/bh \approx a/b$, pues $ah \cdot b = bh \cdot a$.

10.7 Indicaremos con Q_0 el conjunto que se obtiene a partir del conjunto Q de los números racionales, suprimiendo el racional cero (55).

10.8 El *cociente* de números racionales se define por la condición de que

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \tag{57}$$

significa que

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \tag{58}$$

Ya vimos que la *división* o formación del cociente no es una operación (totalmente definida) en Q.[42] Por ejemplo,

$$\frac{3}{2} \div \frac{0}{1}$$

no existe, pues todo número racional, multiplicado por el racional cero, da como resultado el racional cero, y por tanto no hay ningún número racional $\frac{x}{y}$ que verifique $\frac{x}{y} \cdot \frac{0}{1} = \frac{3}{2}$.

Se demuestra que, en cambio, la división es una operación (totalmente definida) en el conjunto Q_0[43] que introdujimos en 10. 7.

11. Inmersión (embedding)

11. 1 (Confróntese 7. 1). Las definiciones (48) de la suma y (54) de la multiplicación de números racionales dan para $b = d = 1$:

$$\frac{a}{1} + \frac{c}{1} = \frac{a+c}{1}, \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{1}, \tag{59}$$

es decir, las clases de equivalencia respecto de $\approx$ (números racionales) que pueden escribirse en la forma

$$\frac{a}{1}, \ \frac{c}{1}, \text{ con segunda componente } 1,$$

se comportan respecto de las operaciones de suma y de multiplicación, como los números enteros a y c que figuran como primeras componentes (numeradores). En otras palabras, para efectuar las operaciones de suma y de multiplicación con números *racionales* (fracciones) representados por pares *con denominador 1*, se efectúan las correspondientes operaciones con los números *enteros* que figuran como numeradores.

Por esta razón podemos convenir en identificar[44] cada número *racional* que pueda escribirse en la forma $\frac{a}{1}$, con el número *entero* que figura como numerador. Con este convenio, el conjunto Z de los números enteros es una parte del conjunto Q de los racionales:

$$Z \subset Q,$$

y además resulta satisfecho el requisito (i) de 9.3.

11.2 En consecuencia, se tiene también para las operaciones inversas definidas en 10.3 y 10.8:

$$\frac{a}{1} - \frac{c}{1} = \frac{a-c}{1}, \quad \frac{a}{1} \div \frac{c}{1} = \frac{a \div c}{1},$$

si existe en Z el cociente $a \div c$.

12. Propiedades de Q

12.1 (Confróntese 8.1). Sin entrar en detalles, señalemos aquí que todas las propiedades del conjunto Q de los números racionales en relación con las operaciones racionales (suma, resta, multiplicación y división) pueden demostrarse a partir de un número relativamente pequeño de propiedades muy sencillas, que ahora enunciaremos.

Propiedades algebraicas de Q

a. En el conjunto Q de los números racionales existe una operación +, llamada *suma*, que verifica las mismas condiciones a_1 - - a_4 señaladas en 8.1 para los enteros.

b. En el conjunto Q de los números racionales hay una operación $\cdot$, llamada *multiplicación*, que tiene las propiedades b_1 a b_3 señaladas en 8.1 para los enteros, *y además:*

b₄. Para cada número racional *no nulo* x (que ahora señalamos por un único símbolo) existe un número racional, llamado *inverso* de x e indicado por $\frac{1}{x}$ o x^{-1}, tal que

$$x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1. \qquad (60)$$

Por ejemplo, si $x = \frac{2}{3}$, es $x^{-1} = \frac{3}{2}$, pues $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1}$, o sea, = 1 (11.1).[45]

c. Las operaciones de suma y multiplicación en Q, cumplen la ley *distributiva:* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.[46]

12.2 *Primeras consecuencias de las propiedades algebraicas*

(i) Vemos que en Q subsisten todas las propiedades algebraicas señaladas en 8.1 para Z, con lo cual se cumple el requisito (ii) de 9.3. Consecuencia de esto, es que todas las propiedades demostradas en 8.2 para Z (cancelativa de la suma, de absorción del cero, involutiva $-(-x) = x$, reglas de los signos) subsisten en Q en virtud de las mismas demostraciones.

(ii) Una propiedad cuya demostración exige el uso de b_4, y no es válida en Z, es ésta:

Teorema. *La ecuación en* x

$$a \cdot x = b, \quad (a, b \in Q, \quad a \neq 0), \tag{61}$$

tiene en Q *la solución única:*

$$x = a^{-1} \cdot b = \frac{1}{a} \cdot b = b \cdot \frac{1}{a}, \tag{62}$$

que también se denota $\frac{b}{a}$.

Demostración. Multiplicando por a^{-1} ambos miembros de (61) se obtiene:

$$a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b,$$

y, en virtud de b_1, b_4 y b_3 el primer miembro se transforma así:

$$a^{-1} (a \cdot x) = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

12.3 Lo mismo que en N y en Z, también entre los números racionales puede establecerse una relación de orden indicada por $\leq$.[47] Sin entrar en detalles señalemos que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ están escritos *con denominadores positivos* (lo cual siempre es posible, poniendo por ejemplo $\frac{-2}{3}$ y no $-\frac{2}{3}$), esa relación $\leq$ puede definirse formalmente a partir de la relación $\leq$ en Z, estableciendo que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ significa que } a \cdot d \leq b \cdot c. \tag{63}$$

Por ejemplo, $\frac{7}{6} \leq \frac{6}{5}$, pues $7 \cdot 5 \leq 6 \cdot 6$, o sea, $35 \leq 36$.

12.4 Subsisten para la relación de orden $\leq$ en Q las propiedades señaladas en 8.3 I y II para Z.[48] Agreguemos que la relación de orden $\leq$ en Q (y también en Z) es *arquimediana,* es decir, tiene la propiedad siguiente, que no puede deducirse de las dadas en 8.3:[49]

Axioma de Arquímedes. Dados dos números racionales a *y* b *tales que* $0 < a < b$, *hay un número natural* n *tal que* (Fig. 23):

$$b \leq n \cdot a$$

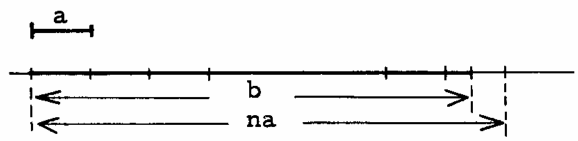


Fig. 23

12.5 *Primeras consecuencias*

(i) Análogamente a 12.2 (i), todas las propiedades de 8.4 subsisten en Q con las mismas demostraciones.

(ii) Veamos ahora propiedades del orden $\leq$ en Q, que no tienen similares en Z.

Teorema 1. $0 < x \Rightarrow 0 < x^{-1}$.

Demostración. Supongamos que $0 < x$. Si fuera $x^{-1} \leq 0$ por el teorema 8 de 8.4 sería $x \cdot x^{-1} = 1 \leq 0$, en contradicción con el corolario 2 de 8.4.

Definición. (Confróntese 1-4.5). *Un orden* $\leqslant$ *en un conjunto* A *se llama* <u>*denso*</u> *si, dados dos elementos* x, y *de* A *tales que* $x < y$ *(o sea,* $x \leqslant y$ *y* $x \neq y$*), existe un elemento* $z \in A$ *tal que* $x < z < y$.

Teorema 2. *El orden* $\leq$ *en* Q, *es denso.*

Demostración. Sea $x < y$. Entonces:

$$2 \cdot x = x + x < x + y < y + y = 2 \cdot y. \qquad (64)$$

Pero, por ser $0 < 1$ (corolario 2 de 8.4), es $0 < 1 + 1 = 2$, y entonces (por teor. 1) $0 < 2^{-1}$ y por tanto de (64) se deduce:

$$x < \frac{x + y}{2} < y.$$

4

EL NUMERO REAL

1. Intervalos

1.1 Vimos en capítulo 1-6 cómo se puede definir un número real por una expresión decimal y el concepto de aproximación. Así como los números racionales se pueden representar mediante una escala racional (cap. 1-4.2) por ciertos puntos de una recta, los números reales se representan por los puntos de una recta que se llama *eje de abscisas*.

En un eje de abscisas, a cada punto corresponde un número real que llamaremos *abscisa* del punto. El punto P de abscisa r se llamará también *punto* r.

1.2 Dados dos números reales a y b tales que $a < b$, se definen los conjuntos siguientes, llamados *intervalos finitos* de *extremo inferior* a y *extremo superior* b, *abierto* y *cerrado*, respectivamente:

$$(a, b) = \{x | a < x < b\} \quad (1)$$

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}. \quad (2)$$

En palabras: el *intervalo abierto* (a, b) es el conjunto de los números reales comprendidos entre a y b; este conjunto no contiene como elementos a ninguno de los extremos a y b. *El intervalo cerrado* $[a, b]$ es el conjunto de los números reales entre a y b, y, además, los extremos a y b.

Asimismo se definen los intervalos "abierto a izquierda y cerrado a derecha":

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\},$$

y "cerrado a izquierda y abierto a derecha":

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}.$$

Se llama *amplitud* o *longitud* de cualquiera de estos cuatro intervalos a la diferencia de sus extremos: $l = b - a$ (Fig. 24).

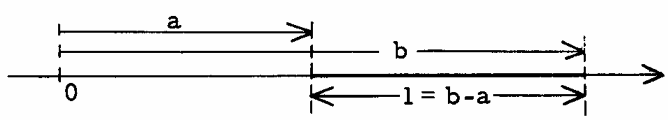


Fig. 24

Por ejemplo, la longitud del intervalo $(-2, 3)$ es $l = 3-(-2) = 5$.

1.3 Una desigualdad única tal como $x > a$ caracteriza, en cambio, una semirrecta que parte de a en el sentido del eje (Fig. 25); la llamaremos *intervalo infinito* desde a hasta infinito:

$$(a, \infty) = \{x \mid a < x\}.$$

Análogamente, los números reales x tales que $x < a$ forman el intervalo infinito desde menos infinito $(-\infty)$ hasta a (Fig. 25):

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}.$$

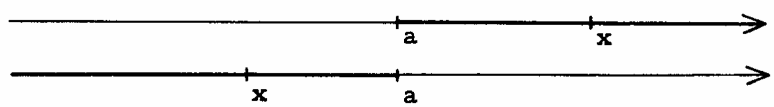


Fig. 25. Intervalos infinitos (a, ∞) y $(-\infty, a)$.

1.4 Conviene familiarizarse con la representación de intervalos mediante desigualdades en otras formas. Recordemos que se llama *módulo* de a o *valor absoluto* de a, y se anota $|a|$, al mayor de los números a y $-a$ (es decir, al que no es negativo). Por ejemplo, $|-2| = 2$, pues de los números -2 y $-(-2) = 2$, el mayor es el segundo. Análogamente: $|-3| = |3| = 3$; $|1| = 1$. La definición se completa con $|0| = 0$.

Entonces, la desigualdad

$$|x| \le r, \quad \text{equivale a} \quad -r \le x \le r, \quad (r > 0),$$

y entonces caracteriza el intervalo cerrado de *punto medio* O de abscisa 0, y *semilongitud* o *semiamplitud* r (Fig. 26). [50] Más generalmente, la desigualdad

$$|x - a| \le r \qquad (3)$$

caracteriza al intervalo cerrado de punto medio a y semiamplitud r (Fig. 27), pues equivale a $-r \leq x - a \leq r$, o sea, a

$$a - r \leq x \leq a + r. \tag{4}$$

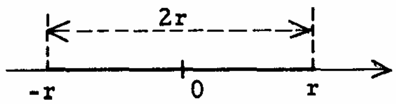


Fig. 26. $\{x \mid |x| \leq r\}$.

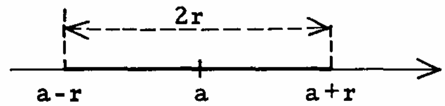


Fig. 27. $\{x \mid |x - a| \leq r\}$.

1.5 También la representación geométrica ayuda a interpretar y transformar desigualdades entre números reales. He aquí algunos ejemplos:

(i) De $a < b$ (a a izquierda de b, Fig. 28) se deduce $-b < -a$ ($-b$ a izquierda de $-a$), y recíprocamente.

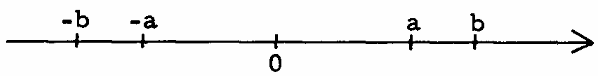


Fig. 28. $a < b$ si, y sólo si, $-b < -a$.

(ii) Se tiene

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{5}$$

como se ve analizando todos los casos posibles en cuanto a los signos de a y de b.[51] La figura 29 representa los casos $a > 0$, $b > 0$ (a y b positivos), y $a < 0$, $b > 0$.

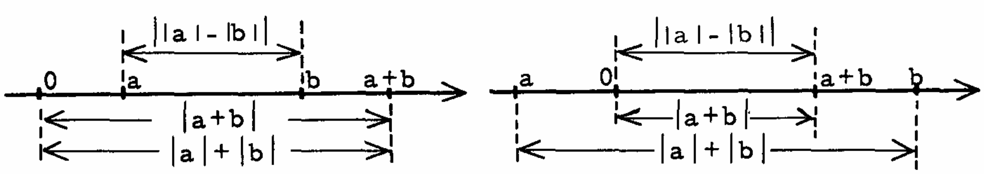


Fig. 29

(iii) También se demuestra [52] que son válidas las desigualdades (Fig. 29):

$$|a + b| \geq |b| - |a|, \qquad |a + b| \geq |a| - |b|. \tag{6}$$

(iv) Las dos desigualdades (6) se resumen en esta única:

$$|a + b| \geq \big|\, |a| - |b| \,\big|, \tag{6'}$$

cuyo segundo miembro es uno de los segundos miembros de (6).

(v) Las desigualdades (5) y (6') pueden agruparse así:

$$\big|\, |a| - |b| \,\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|, \tag{7}$$

y de aquí resulta, cambiando b por $-b$:

$$\big|\, |a| - |b| \,\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

2. Aproximaciones por Defecto y por Exceso. Definición de Número Real por Encaje de Intervalos

2.1 Vimos en el capítulo 1-5 y 6 que un número real queda determinado por una expresión decimal, y que el número es racional si ésta se corta o es periódica, e irracional en caso contrario. Esto nos condujo a definir provisionalmente el *número real* por su expresión decimal (cap. 1-6.3), y éste era el concepto de número aceptado hasta mediados del siglo pasado. Pero la necesidad de independizar el concepto de número de todo sistema particular de numeración, y la revisión crítica de los fundamentos y principios de la Matemática, condujeron a definiciones más adecuadas que dieron K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor, etc.

El método de las *cortaduras* de Dedekind, que veremos en 5, tiene ventajas en el desarrollo teórico, pero la definición de número real que ahora daremos es la que surge en forma más natural del proceso de *medir cantidades* e involucra el importante concepto de *aproximación*. Las medidas aproximadas por defecto y por exceso de una cantidad h son los extremos de intervalos que contienen a h en su interior. Este intervalo es tanto más pequeño cuanto mayor sea el grado de la aproximación.

2.2 Esta idea conduce a una definición matemática rigurosa del *número real* a partir de esta intuición geométrica:

Todo número real está representado por un punto de un eje de abscisas, y al considerar aproximaciones racionales por defecto y por exceso, cada vez mejores, ese punto aparece como punto común de los infinitos intervalos cerrados de una sucesión

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \ldots,\ [a_{n-1}, b_{n-1}],\ [a_n, b_n], \ldots \tag{8}$$

con estas dos propiedades: cada intervalo está contenido en el anterior:

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \qquad (9)$$

y sus longitudes llegan a ser tan pequeñas como se quiera (Fig. 30).

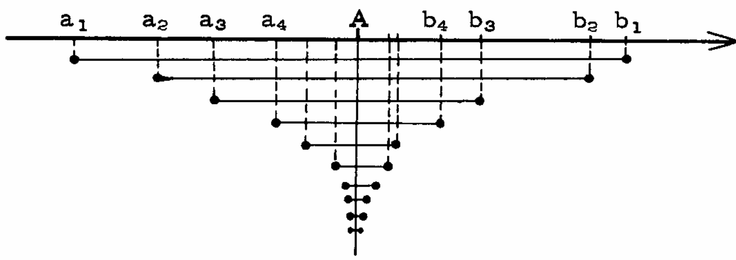


Fig. 30

Una tal sucesión se llama *encaje de intervalos.*

Por ejemplo, para el número

$$\pi = 3,14159... \qquad (10)$$

se tiene:

Intervalos		Longitudes
Apr. por defecto	Apr. por exceso	
[3 ,	4]	1
[3,1 ,	3,2]	0,1
[3,14 ,	3,15]	0,01
[3,141,	3,142]	0,001
....		.....

Análogamente, el número

$$\sqrt{2} = 1,414... \qquad (11)$$

está definido por el encaje de intervalos:

$$[1;2],\ [1,4;\ 1,5],\ [1,41;\ 1,42],\ [1,414;\ 1,415],\ldots \qquad (12)$$

donde, como antes, los extremos de la izquierda representan aproximaciones por defecto, y los de la derecha por exceso, cada vez mejores.

2.3 Vemos, pues, que *admitida la definición provisional de número real* dada en el capítulo 1-6.3, cada número real se expresa como único elemento común a todos los intervalos de un encaje de intervalos. En los ejemplos de 2.2 hemos partido de los números π y $\sqrt{2}$ dados en (10) y (11) por sus expresiones decimales.

Pero nuestro propósito es dar una nueva definición de número real, sin los inconvenientes de la definición provisional. Entonces, en lugar de considerar el encaje de intervalos formado por las aproximaciones decimales de un número real, *definiremos* un número real mediante un encaje de intervalos racionales cualquiera.

Pero notemos que un mismo número real se puede determinar por *diferentes encajes de intervalos racionales* (es decir, de extremos racionales), considerando *otras* aproximaciones racionales. Dos encajes de intervalos (8) y

$$[c_1, d_1],\ [c_2, d_2], \ldots,\ [c_n, d_n], \ldots \tag{12}$$

determinan *el mismo número real* si cada extremo inferior de un intervalo de uno de ellos es menor o igual que todo extremo superior de un intervalo del otro:

$$a_i \leq d_j, \quad c_i \leq b_j \tag{13}$$

para cualquier par de índices i, j.

Ahora bien, si definimos una relación E entre los encajes de intervalos estableciendo que (8) está en esa relación con (12) si se cumplen las condiciones (13), es inmediato verificar que E es una *relación de equivalencia* (cap. 3-2). Por tanto E determina una *partición* del conjunto de los encajes de intervalos en *clases de equivalencia*. Como dos encajes de intervalos racionales de la misma clase de equivalencia determinan el mismo número real, será oportuno redefinir el número real, no por una clase de intervalos racionales, sino por una clase de equivalencia de tales encajes.[53]

Definición 1. Llamaremos *encaje de intervalos racionales a toda sucesión* (8) *de intervalos cerrados de extremos racionales, cada uno contenido en el anterior:* (9), *y tal que dado un número positivo* $\epsilon > 0$ *arbitrario (tan pequeño como se quiera), resulta* $b_n - a_n < \epsilon$ *con tal de tomar* n *suficientemente grande (mayor que un número* n_0 *que depende del* ϵ *dado).* (Fig. 30).

Definición 2. *Un número real* A *es una clase de equivalencia de encajes de intervalos racionales como* (8) *y* (12) *respecto de la relación de equivalencia definida por las condiciones* (13).

2.4 Reflexionemos sobre el camino recorrido. En posesión del número racional y de una definición provisional de número real, simples consideraciones intuitivas sobre aproximaciones racionales de un número real, conducen a considerarlo como elemento común de los intervalos de un encaje (2.2). Luego (2.3) dejamos de lado este enfoque intuitivo, que requiere un conocimiento previo del número real, pero *retomamos el encaje de intervalos racionales* y *llamamos número real* a una clase de equivalencia de tales encajes.

Parecerá extraño llamar número real a una clase de equivalencia de encajes de intervalos racionales. Ello se debe a que las *propiedades matemáticas* de los números reales pueden expresarse como propiedades de tales clases. Lo que importa ante todo es que para estos números se puedan definir

las operaciones fundamentales y el orden $\leq$,

de suerte que el conjunto R de los números reales pueda considerarse como una ampliación del conjunto Q de los racionales, y se conserven las propiedades de las operaciones y del orden en Q.

3. Operaciones y Orden

3.1 Esbocemos la manera de definir en R las operaciones fundamentales y el orden $\leq$, a partir de la definición de número real dada en 2.3.

3.2 *Suma.* Sean A y B dos números reales determinados por los encajes de intervalos racionales (8) y (12). Si se suman los extremos inferiores, y por otra parte los superiores, de los intervalos de igual rango en ambos encajes, se obtiene un nuevo encaje de intervalos. Este encaje

$$[a_1 + c_1, b_1 + d_1], \ldots, [a_n + c_n, b_n + d_n], \ldots$$

determina un número real que llamaremos *suma* de A y B, y denotaremos por A + B. [(54)]

Por ejemplo, para $\pi + \sqrt{2}$ tendremos (2.2) el encaje de intervalos

$$[4;6], \ [4,5;4,7], \ [4,55;4,57], \ldots,$$

donde los extremos inferiores son sumas de aproximaciones por defecto de π y de $\sqrt{2}$ y, por tanto, aproximaciones por defecto de $\pi + \sqrt{2}$ y análogamente los extremos superiores.

3.3 *Resta.* Si el número real B está determinado por el encaje de intervalos (12), determinaremos el número real -B, llamado *opuesto* o *contrario* de B, por el encaje de intervalos:

$$[-d_1, -c_1],\ [-d_2, -c_2], \ldots, [-d_n, -c_n], \ldots .$$

Con esto podemos definir la *diferencia* A - B como la suma de A y el contrario de B:

$$A - B = A + (-B). \tag{14}$$

3.4 En forma análoga se pueden definir las operaciones de *multiplicación* y *división* de números reales.[55]

3.5 *Orden.* El número real A determinado por el encaje de intervalos (8) se llama *positivo,* y se denota $A > 0$, si tiene positiva alguna aproximación racional *por defecto* es decir, si $a_n > 0$ para algún n. El número real A se llama *negativo,* y se anota $A < 0$,

si tiene negativa alguna aproximación racional *por exceso,* es decir, si $b_n < 0$ para algún n. Si no se da ninguno de estos casos, A es el número real *cero* $A = 0$. El número real A se llama *no negativo,* y se anota $A \geq 0$, si es $A > 0$ o bien $A = 0$.

Se define en R la relación $\leq$ poniendo

$$A \leq B, \quad (A,\ B \in R),$$

si existe un número real no negativo C ($C \geq 0$), tal que $A + C = B$.

Con esta definición se demuestra que $\leq$ es una relación de orden lineal en el conjunto R de los números reales, y que subsisten las demás propiedades vistas en capítulo 3-8.3 y 12.4, que ahora vinculan el orden $\leq$ con la estructura algebraica dada a R mediante las operaciones de suma y de multiplicación.

4. Idea del Método de Cantor

4.1 Si consideramos el número real A determinado por el encaje de intervalos (8), vemos que los extremos inferiores:

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{15}$$

forman una sucesión de números racionales que se aproximan tanto como se quiera al número A (Fig. 31, a). Lo mismo ocurre con la sucesión de los extremos superiores (Fig. 31, b):

$$b_1, \; b_2, \; \ldots, \; b_n, \; \ldots, \qquad (16)$$

y con cualquier otra que se forme considerando todos o algunos de unos y otros extremos; por ejemplo (Fig. 31, c):

$$a_3, \; a_4, \; b_4, \; a_5, \; b_5, \; \ldots \qquad (17)$$

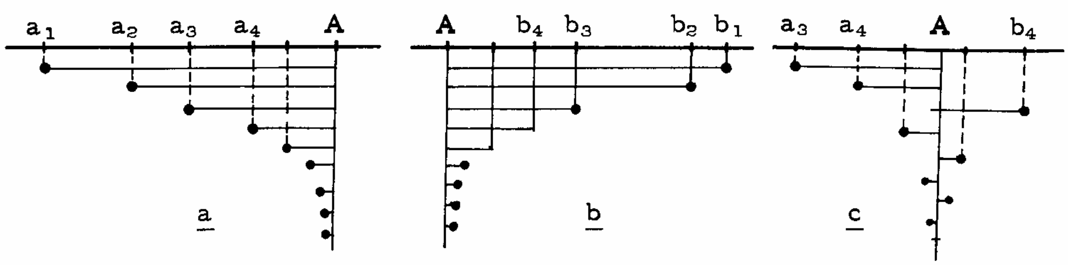


Fig. 31. Sucesiones fundamentales.

4.2 Las sucesiones (15), (16) y (17) tienen la propiedad expresada por la definición siguiente:

Definición 1. *Una sucesión de números*

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \; \ldots, \; c_n, \; \ldots \qquad (18)$$

se llama *de Cauchy* *o* *fundamental,* *si para cada número positivo* ε *existe un número* n_ε *tal que*

$$(n > n_\varepsilon \;\; y \;\; p > 0) \Rightarrow |c_n - c_{n+p}| < \varepsilon. \qquad (19)$$

4.3 El método de G. Cantor se basa en la determinación de un número real mediante una *sucesión fundamental de números racionales*. Pero un mismo número real puede aproximarse tanto como se quiera por diferentes sucesiones de números racionales, como señalamos en 4.1. Por eso conviene dar esta definición:

Definición 2. *Dos sucesiones fundamentales* (18) *y*

$$d_1, \; d_2, \; d_3, \; \ldots, \; d_n, \; \ldots \qquad (20)$$

se llaman equivalentes si para cada número positivo ε *existe un número* N_ε *tal que:*

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |c_n - d_n| < \varepsilon. \tag{21}$$

Dos sucesiones fundamentales equivalentes determinan el mismo número real. Pero como la equivalencia de sucesiones fundamentales es una relación de equivalencia (cap. 3-2) y por tanto define una partición del conjunto de las sucesiones fundamentales en clases de equivalencia, la afirmación del comienzo equivale a decir que todas las sucesiones fundamentales de una misma clase de equivalencia determinan el mismo número real.

Entonces, en el método de Cantor, si bien cada número real se puede *determinar* por una sucesión fundamental de números racionales, se lo *define* como una clase de equivalencia de tales sucesiones (confróntese 2.3, def. 2):

Definición 3. *Un número real* A *es una clase de equivalencia de sucesiones fundamentales de números racionales como* (18) *y* (20), *respecto de la relación de equivalencia definida por la condición* (21).

5. Cortaduras de Dedekind

5.1 Con los métodos de encaje de intervalos y de sucesiones fundamentales, un mismo número real puede determinarse por infinitas sucesiones de intervalos racionales y de números racionales, respectivamente. Por eso en ambos métodos el número real se define como una *clase de equivalencia.*

Por otra parte, R. Dedekind (1831-1916), uno de los grandes iniciadores del moderno análisis lógico y filosófico de los fundamentos de la Matemática, introdujo el número real por un método llamado de las *cortaduras*. Cada cortadura --que definiremos en 5.2-- es una clasificación especial de los números racionales en dos clases, y determina un número real. Pero, contrariamente a lo que ocurre en los métodos de encaje de intervalos y de Cantor, un número real queda determinado por una *única* cortadura si es irracional, y por sólo dos de ellas si es racional.

5.2 **Definición.** *Se llama cortadura de Dedekind en el conjunto* Q *de los números racionales, o cortadura en el campo racional, a toda clasificación de los números racionales en dos clases* A *y* B, *de modo tal que:*

(i) *Ambas clases contienen números;*

(ii) *Todo número de la clase* A *es menor que cualquier número de la clase* B: $a \in A$ *y* $b \in B \Rightarrow a < b$;

(iii) *Todo número racional pertenece a una de las dos clases.*

5.3 *Notación y nombres.* La cortadura definida en 5.2 se denota (A, B); la clase A se llama *clase inferior* y B se llama *clase superior* de la cortadura (A, B).

5.4 Teorema. *En toda cortadura* (A, B) *en el campo racional se presenta uno y sólo uno de los siguientes tres casos:*

(i) *La clase* A *contiene un número,* a_0, *mayor que todos los demás de ella;*

(ii) *La clase* B *contiene un número,* b_0, *menor que todos los demás de ella;*

(iii) *No se verifica ni* (i) *ni* (ii).

Nota. Ejemplos de cada uno de estos casos son:

Para (i):

$$\left.\begin{array}{l} A = \{x \mid x \in Q \text{ y } x \leq 3\} \\ B = \{x \mid x \in Q \text{ y } x > 3\} \end{array}\right\} a_0 = 3.$$

Para (ii):

$$\left.\begin{array}{l} A = \{x \mid x \in Q \text{ y } x < 3\} \\ B = \{x \mid x \in Q \text{ y } x \geq 3\} \end{array}\right\} b_0 = 3.$$

Para (iii): Clase B: racionales *positivos* cuyo cuadrado sea mayor que 2:

$$B = \{x \mid x \in Q,\ x > 0 \text{ y } x^2 > 2\};$$

Clase A: todos los demás números racionales:

$$A = \{x \mid x \in Q \text{ y } x \text{ no pertenece a } B\}.$$

En efecto: 1°) La clase A está formada por *todas* las aproximaciones racionales por defecto de $\sqrt{2}$ (que es irracional, cap. 1-5.2), y puesto que para cada aproximación racional de $\sqrt{2}$ hay otra mayor que ella, la clase A no contiene ningún número que sea mayor que todos los demás de ella.

2°) La clase B está formada por *todas* las aproximaciones racionales por exceso de $\sqrt{2}$, y puesto que para toda aproximación racional de $\sqrt{2}$ hay otra menor que ella, la clase B no contiene ningún número que sea menor que todos los demás de ella.

Demostración del Teorema. Por la definición del caso (iii), basta probar que *no pueden darse a la vez los dos primeros casos.*

Si ello ocurriera, sería por 5.2 (ii), $a_0 < b_0$, y entonces, en virtud de la *densidad* del orden $\leq$ en Q (cap. 3-12.5), existiría un número racional c *entre* a_0 y b_0, es decir, tal que $a_0 < c < b_0$. Pero este número c, por las definiciones de a_0 y de b_0, no podría pertenecer ni a la clase A ni a la clase B, en contradicción con la condición (iii) de 5.2. Esto demuestra el aserto, y con ello el teorema.

5.5 En los dos primeros casos del teorema anterior la cortadura de Dedekind en el campo Q no da nada nuevo, pues queda definida o determinada por un número *racional* (a_0 y b_0, respectivamente). En el caso (iii) la cortadura *define un número irracional.* El número irracional del ejemplo que dimos para el caso (iii) es $\sqrt{2}$.

Adoptaremos, pues, esta definición de número real, sobre la base del conjunto Q de los números racionales:

Definición. *Se llama número real a toda cortadura de Dedekind en el campo Q de los números racionales.*[56]

6. Orden y Operaciones

6.1 (Confróntese 3.1) Esbocemos ahora la manera de introducir en el conjunto R de los números reales el orden $\leq$ y las operaciones fundamentales, a partir de la definición de número real por cortaduras dada en 5.5.

6.2 *Orden.* Sean r y r' dos números reales determinados por las cortaduras de Dedekind (A, B) y (A', B'), respectivamente. Es $r < r'$ si existen por lo menos dos números racionales que pertenecen a B y no a B'.

Nótese que no basta con que haya uno solo: en los ejemplos de 5.4 nota para los casos (ii) y (i), hay *un* número racional, 3, que pertenece a la clase superior en la primera cortadura y no en la segunda, pero ambas cortaduras definen el mismo número real $b_0 = a_0 = 3$.

La relación $\leq$ se define en R estableciendo que $r \leq r'$ significa que $r < r'$ o bien $r = r'$.

6.3 *Suma.* Con las notaciones de 6.2 formemos los conjuntos siguientes (denotados A + A' y B + B'):

$$A + A' = \{x | x = a + a', \ a \in A \text{ y } a' \in A'\},$$

$$B + B' = \{x | x = b + b', \ b \in B \text{ y } b' \in B'\}.$$

Se comprueba que

$$(A + A', \ B + B') \tag{22}$$

es una cortadura de Dedekind. Para ello basta con observar que la diferencia

$$(b + b') - (a + a') = (b - a) + (b' - a')$$

es positiva y puede hacerse tan pequeña como se quiera. En efecto, tales cosas ocurren con cada una de las diferencias en el segundo miembro.

Probado que (22) es una cortadura, definiremos la *suma* $r + r'$ como el número real definido por ella.

6.4 *Resta.* Con las notaciones de 6.2 formemos los conjuntos siguientes (denotados A - B' y B - A'):

$$A - B' = \{x | x = a - b', \ a \in A \text{ y } b' \in B'\},$$

$$B - A' = \{x | x = b - a', \ b \in B \text{ y } a' \in A'\}.$$

Se comprueba que

$$(A - B', \ B - A') \tag{23}$$

es una cortadura. Para ello basta probar que la diferencia

$$(b - a') - (a - b') = (b - a) + (b' - a')$$

es positiva y puede hacerse tan pequeña como se quiera. En efecto, tales cosas ocurren con cada una de las diferencias en el segundo miembro.

Probado que (23) es una cortadura, definiremos la *diferencia* $r - r'$ como el número real definido por ella.

6.5 *Multiplicación.* Por un procedimiento análogo se forma el *producto* de dos números reales. Se empieza por el caso en que ambos sean *positivos,* con la advertencia de poner en la clase inferior del producto los números racionales negativos y los productos de los elementos *positivos* de las clases inferiores de los factores. El producto de dos números reales de signo cualquiera se define mediante el de sus valores absolutos y la aplicación de la regla de los signos.

6.6 *División.* Por análogo procedimiento al de 6.5 se forma el *cociente* de dos números reales, comenzando por el caso en que ambos sean positivos.

7. Propiedades de R

7.1 (Confróntese cap. 3-8.1 y 12.1) Sin entrar en detalles, señalemos aquí que todas las propiedades del conjunto R de los números reales en relación con las operaciones racionales(suma, resta, multiplicación y división) pueden demostrarse a partir de un número relativamente pequeño de propiedades muy sencillas, que ahora enunciaremos.

Propiedades algebraicas de R

Son las mismas enunciadas para los enteros (cap. 3-8.1), con la agregada para los racionales (cap. 3-12.1). O sea:

a. En el conjunto R de los números reales hay una operación +, llamada *suma,* que verifica:

a_1. La ley asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

a_2. La ley conmutativa: $x + y = y + x$.

a_3. Existe un número real 0 (cero), que es *elemento neutro de la suma,* es decir, para todo número real x verifica:

$$0 + x = x + 0 = x. \qquad (24)$$

a_4. A cada número real x corresponde un número real llamado *opuesto* de x e indicado por $-x$, tal que:

$$x + (-x) = 0. \qquad (25)$$

b. En el conjunto R de los números reales existe una operación, llamada *multiplicación,* que verifica:

b_1. La ley asociativa: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

b_2. La ley conmutativa: $x \cdot y = y \cdot x$.

b_3. Hay un número real 1 (uno), que es *elemento neutro de la multiplicación,* es decir, para todo número real x verifica:

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x. \tag{26}$$

Es $1 \neq 0$.

b_4. A cada número real *no nulo* x se puede asociar un número real llamado *inverso* de x e indicado por $\frac{1}{x}$ o x^{-1}, tal que:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1. \tag{27}$$

c. Las operaciones de suma y de multiplicación en R están relacionadas por la siguiente propiedad:

Distributiva: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

7.2 Subsisten para el orden $\leq$ en R las propiedades señaladas con relación a los enteros (cap. 3-8.3) y el axioma de Arquímedes (cap. 3-12.4), a las cuales debe agregarse una propiedad concerniente a una sucesión de intervalos cerrados. Reuniremos estas propiedades en dos grupos.

I. *Propiedades de orden*

Entre los números reales se puede establecer una relación $\leq$ (menor o igual que), con estas propiedades:

a. $\leq$ es una *relación de orden,* es decir, es:

a_1. Reflexiva: $x \leq x$.

a_2. Antisimétrica: $(x \leq y \text{ e } y \leq x) \Rightarrow x = y$.

a_3. Transitiva: $(x \leq y \text{ e } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

b. El orden $\leq$ es *total* o *lineal,* es decir:

Dados dos números reales cualesquiera x e y, es $x \leq y$ ó $y \leq x$.

c. Dada una sucesión (8) de intervalos cerrados, cada uno contenido en el anterior, (9), hay por lo menos un número real perteneciente a todos los intervalos.

Notas. (i) La propiedad **c** se enuncia diciendo que el orden $\leq$ en R es *completo*, o que R es completo respecto del orden $\leq$.

(ii) En **c** no se exige que las longitudes de los intervalos sean tan pequeñas como se quiera, de modo que no se tiene necesariamente un encaje de intervalos en el sentido de 2.2 y 2.3. Por eso no hay *unicidad* para el número real perteneciente a todos los intervalos (véase 7.3, teorema 1).

(iii) Por otra parte, en **c** es esencial la condición de que los intervalos sean *cerrados*. Por ejemplo, en la sucesión de intervalos abiertos

$$(0, 1),\ (0, 1/2), (0, 1/3), \ldots,\ (0, 1/n), \ldots$$

cada uno está contenido en el anterior, pero no hay ningún número perteneciente a *todos* ellos. Este mismo ejemplo muestra la necesidad de que, en el encaje de intervalos racionales de 2.3, los intervalos sean *cerrados*.

II. *Relación del orden $\leq$ con la estructura algebraica*

a. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$

b. $(0 \leq x \text{ y } 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y.$

c. *Axioma de Arquímedes. Dados dos números reales a y b tales que $0 < a < b$, existe un número natural n tal que $b \leq n \cdot a$.*

7.3. *Primeras consecuencias*

(i) Vemos que en R subsisten todas las propiedades algebraicas señaladas para los enteros (cap. 3-8.1) y para los números racionales (cap. 3-12.2). Entonces subsisten en R con las mismas demostraciones los teoremas demostrados en capítulo 3-8.2 para Z (propiedades cancelativa de la suma, de absorción del cero, involutoria $-(-x) = x$, regla de los signos).

Asimismo, subsiste en R con igual demostración la propiedad demostrada en capítulo 3-12.2 para Q: existencia de solución única de la ecuación $a \cdot x = b$ si $a \neq 0$. Otras ecuaciones algebraicas no son resolubles en Q pero sí en R. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 2 = 0,$$

que en R tiene las soluciones $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$ (por ej., $(\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$). Pero hay ecuaciones algebraicas no resolubles en R, como

$$x^2 + 1 = 0,$$

pues cualquiera que sea $x \in R$, es $x^2 \geq 0$ y entonces $x^2 + 1 \neq 0$. Para llegar a la existencia de solución de *toda* ecuación algebraica es preciso ampliar nuevamente el conjunto de los números con la introducción de los números complejos (cap. 5).

(ii) Asimismo, subsisten con las mismas demostraciones los teoremas concernientes al orden $\leq$ demostrados a propósito de los enteros (cap. 3-8.4) y de los racionales (cap. 3-12.5). En R valen además otras propiedades como consecuencia de que el orden $\leq$ es *completo* (Ic de 7.2).

Teorema 1. *Para todo encaje de intervalos, es decir* (2.3), *para toda sucesión de intervalos cerrados cada uno contenido en el anterior y con longitudes tan pequeñas como se quiera, existe un único número real perteneciente a todos los intervalos.*

Demostración. (i) *Existencia.* Resulta de la propiedad Ic de 7.2.

(ii) *Unicidad.* Si hubiera dos números reales distintos r_1 y r_2 pertenecientes a todos los intervalos, las longitudes de todos ellos serían no menores que $|r_1 - r_2| > 0$, contra la hipótesis.

Definición 1. *Sea* S *un conjunto de números reales. El número* k *se llama* *<u>cota superior</u>* *de* S *si*

$$x \in S \Rightarrow x \leq k.$$

Es claro que si k es cota superior de S, también lo es todo número mayor que k.

Tienen cotas superiores los intervalos $[1, 3]$ y $(1, 3)$, pero no el intervalo $(1, \infty)$ ni el conjunto Z de los enteros.

Definición 2. *Sea* S *un conjunto de números reales. El número* e *se llama* *<u>extremo superior</u>* *de* S, *o* *<u>supremo</u>* *de* S, *y se designa* $e = \sup S$, si:

(i) e *es cota superior de* S;

(ii) k *cota superior de* $S \Rightarrow e \leq k$.

Por ejemplo, los intervalos $[1, 3]$ y $(1, 3)$, y el conjunto $\{1, 3\}$, tienen todos el supremo 3.

Esta importante propiedad de los números reales puede demostrarse a partir de las de 7.1 y 7.2: [57]

Teorema 2. *Todo conjunto* S *de números reales, no vacío (es decir, con un elemento por lo menos), que tenga una cota superior, tiene supremo.*

La propiedad no es válida en el conjunto Q de los racionales. Por ejemplo, el conjunto

$$S = \{x \mid x \in Q \text{ y } x^2 < 2\}$$

tiene la cota superior 2, pues $x^2 < 2 \Rightarrow x < 2$, pero no tiene supremo en Q (las cotas superiores racionales son los racionales $> \sqrt{2}$, pero a cada racional $> \sqrt{2}$ corresponde otro racional $> \sqrt{2}$ menor que él).

(iii) Así como con *cortaduras en los racionales* se amplía su conjunto Q con el de los números reales R, cabe pensar si, definiendo análogas *cortaduras en el campo real,* no se lograra una ulterior ampliación de este campo. El *teorema de plenitud* de Dedekind, que se demuestra a partir del teorema 2, excluye esta posibilidad: *Toda cortadura en el campo real está definida por un número real* (y sólo uno). Más precisamente: [58]

Teorema 3. *Si* (A, B) *es una partición del conjunto* R *de los números reales en dos clases disjuntas* A *y* B, *tal que*

$$a \in A \text{ y } b \in B \Rightarrow a < b,$$

entonces, o bien A *tiene un elemento mayor que todos los demás de* A, *o bien* B *tiene un elemento mayor que todos los demás de* B. [59]

8. Definición Directa del Número Real

Vimos que todas las propiedades de los números reales en relación con las operaciones racionales y el orden, se pueden deducir de las enunciadas en 7.1 y 7.2, donde figuran sólo las operaciones + y $\cdot$, y la relación $\leq$. Por eso puede definirse directamente el número real, sin partir del número natural y recorrer el camino $N \to Z \to Q \to R$. El *método directo* consiste en introducir el sistema $(R, +, \cdot, \leq)$ en el cual R es un conjunto cuyos elementos se llaman *números reales*, + y · son dos operaciones en R, ≤ es una relación en R, y se cumplen las propiedades de 7.1 y 7.2.(60)

Este método es el más utilizado modernamente por su mayor agilidad y se debe a D. Hilbert (1862-1943), quien expuso su fundamento en un célebre artículo publicado en 1900: *Uber die Zahlbegriff (Sobre el concepto de número)*.

En el método directo se definen luego N, Z y Q como subconjuntos especiales de R.

5

EL NUMERO COMPLEJO

1. Introducción

1.1 ¿Por qué ampliamos el conjunto N de los números naturales? Porque en N no siempre se puede ***restar***. ¿Por qué ampliamos el conjunto Z de los enteros? Porque en Z no siempre se puede ***dividir***. Ampliamos el campo numérico para tener más libertad en los cálculos.

En el conjunto Q de los números racionales se pueden resolver las ecuaciones de primer grado (cap. 3-12.2(ii)). En cambio, la ecuación de segundo grado $x^2 - 2 = 0$ o sea $x^2 = 2$ no es resoluble en Q. Pero sí lo es en R (reales), con raíces o soluciones $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ (véase cap. 4-7.3(i)). ¿Podrán resolverse en R todas las ecuaciones de segundo grado? Ya vimos en capítulo 4-7.3(i) que no. La ecuación $x^2 + 1 = 0$, o sea

$$x^2 = -1 \qquad (1)$$

no puede resolverse en R pues el cuadrado de un número real no es nunca negativo.

1.2 Entonces:

(i) O bien nos resignamos a aceptar que una ecuación tan simple como (1) *no puede resolverse*, y lo mismo muchas otras;

(ii) O bien proseguimos nuestra serie de ampliaciones del campo numérico agregando otro eslabón a la cadena de inclusiones

$$N \subset Z \subset Q \subset R. \qquad (2)$$

1.3 Esto último es precisamente lo que haremos. Por de pronto, para resolver la ecuación (1) introduciremos un nuevo símbolo numérico, que indicaremos por i, definido por la condición:

$$i^2 = -1. \qquad (3)$$

Por lo dicho en 1.1, este símbolo i carece de sentido mientras estemos en el campo real R. Pero veremos que conviene considerar a i como un *número* (llamado *"unidad imaginaria"*), en un *campo numérico* C (de los *"números complejos"*), más amplio que R, es decir agregar a la cadena de inclusiones (2) el eslabón

$$R \subset C. \tag{4}$$

1.4 Asimismo, carecen de sentido en R expresiones como éstas:

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt{-38}, \quad (-2)^{3/4}, \quad \log(-3).$$

Ello es particularmente claro en las dos primeras: no hay ningún número real cuyo cuadrado sea -4 o -38. Aunque $\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-38}$ aún carecen de sentido para nosotros, transformemos esas expresiones en la hipótesis provisional de que subsista la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación. Se obtiene:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2\sqrt{-1}, \tag{5}$$

86

$$\sqrt{-38} = \sqrt{-38 \cdot (-1)} = \sqrt{38} \cdot \sqrt{-1} = \pm 6,1 \ldots \sqrt{-1}; \tag{6}$$

es decir, en ambos casos se obtiene el producto de un número real por un mismo factor $\sqrt{-1}$. Ahora bien, por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{-1}$ es un número cuyo cuadrado es -1, y como i cumple esta condición en virtud de (3), pondremos

$$i = \sqrt{-1}, \tag{7}$$

con lo cual las igualdades (5) y (6) pueden escribirse así:

$$\sqrt{-4} = \pm 2i, \quad \sqrt{-38} = \pm 6,1\ldots i.$$

Aquí aparecen ya operaciones con el número i. Otros problemas, tales como la resolución de ecuaciones de segundo grado menos simples que (1), conducen a expresiones tales como

$$a + bi, \quad (a, b \in R), \tag{8}$$

llamadas números *complejos*.

1.5 La ecuación de segundo grado se puede escribir, dividiendo por el coeficiente de x^2, en la forma

$$x^2 + px + q = 0, \tag{9}$$

y se transforma sucesivamente así:

$$x^2 + px = -q, \quad x^2 + px + (p/2)^2 = (p/2)^2 - q,$$

$$(x + (p/2))^2 = (p^2/4) - q, \quad x + (p/2) = \pm \sqrt{(p^2/4 - q},$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

es decir, las raíces de la ecuación (9) son

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{10}$$

Ejemplos. (i) En la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \tag{11}$$

es $p = -4$, $q = 3$. Las raíces son:

$$x_1 = -(-2) + \sqrt{4-3} = 2 + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3, \quad x_2 = 2 - 1 = 1.$$

Verifiquemos la primera. Reemplazando en (11) resulta:

$$3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0.$$

87

(ii) En la ecuación

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \tag{12}$$

es p = -2, q = 2. Las raíces son:

$$x_1 = -(-1) + \sqrt{1-2} = 1 + \sqrt{-1} = 1 + i, \quad x_2 = 1 - i.$$

Verifiquemos la primera. Reemplazando en (12) resulta:

$$(1 + i)^2 -2(1 + i) + 2 = 1 + 2i + i^2 -2 -2i + 2 = 1 + 2i -1 -2 -2i + $$
$$+ 2 = 0 + 0i = 0.$$

1.6 Es natural, pues, operar con números complejos (8) como si se tratara de binomios ordinarios, pero teniendo en cuenta (7) o la igualdad equivalente (3).

Por ejemplo:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \tag{13}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bic + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{14}$$

Pero esta manera puramente formal de proceder, además de sus misteriosas lagunas, es inadmisible como conceptuación, y fuerza es sustituirla por un desarrollo en forma lógica del concepto de número complejo, como el que expondremos, debido a Hamilton (1853).

2. El Número Complejo como Par Ordenado. Operaciones e Inmersión

2.1 No es fácil imaginar "qué es" i desde un punto de vista intuitivo. Pero, desde mediados del siglo XIX, los matemáticos tomaron plena conciencia de que la base esencial del concepto de número está en las operaciones y sus propiedades, y de que toda ampliación del campo numérico se obtiene *definiendo* nuevos números. Toda definición es *libre*, pero resulta de poco valor si no se la ***elije*** de manera adecuada. En nuestro caso, deben definirse los números complejos y las operaciones con ellos de modo que subsistan las propiedades algebraicas de R (cap. 4-7.2). Pero no es posible definir en el conjunto C de los complejos un orden $\leq$ en el cual subsistan las propiedades del capítulo 4-7.3.

2.2 Definiremos el número complejo como par ordenado (0.3 f)

$$z = (a, b) \tag{15}$$

de números reales, llamados el primero, *componente real* $R(z) = a$ y el segundo, *componente imaginario* $I(z) = b$ (*no* bi). Por tratarse de pares ordenados, dos números complejos son *iguales* si tienen los mismos componentes. O sea, si los complejos son z y w se tiene:

$$z = w \text{ si, y sólo si, } R(z) = R(w) \text{ e } I(z) = I(w). \tag{16}$$

Entre los pares se definen las operaciones de *suma* y de *multiplicación* tomando como guía las igualdades (13) y (14). En resumen:

Definición. *Llamaremos* <u>*numero complejo*</u> *a todo par ordenado* (a, b) *de numeros reales* a *y* b. *Que el par es ordenado significa que*

$$(a, b) = (c, d) \textit{ si, y sólo si, } a = c \textit{ y } b = d. \tag{17}$$

Entre los números complejos se definen la <u>*suma*</u> *y la* <u>*multiplicación*</u> *por:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d), \tag{18}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{19}$$

2.3 *Inmersión.* (Confróntese cap. 3-7.1 y 11.) Las definiciones (18) y (19) de suma y de multiplicación de complejos dan para $b = d = 0$:

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c,\ 0) = a + c$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (a \cdot c,\ 0) = a \cdot c$$

es decir, los números complejos de la forma $(a, 0)$, $(c, 0)$ --de componente imaginario 0-- se comportan respecto de las operaciones de sumar y multiplicar, como los números reales a y c que constituyen sus respectivos componentes reales. En otras palabras, para efectuar la suma y la multiplicación con números *complejos* de componente imaginario nulo, se suman o multiplican respectivamente los números *reales* que constituyen sus componentes reales.

Por esta razón se conviene en identificar cada *complejo* $(a, 0)$ con el número real a. Con este convenio, el conjunto R de los números reales es una parte del conjunto C de los complejos: $R \subset C$. La identificación se simboliza así:

$$(a, 0) = a. \tag{20}$$

2.4 *Forma binómica.* El complejo (0, 1) se llama *unidad imaginaria* y se designa por i. Se tiene entonces, por (19) y (20):

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1. \tag{21}$$

También en virtud de (19) y (20) se tiene

$$b \cdot i = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b). \tag{22}$$

Finalmente, resulta de (18), teniendo en cuenta (20) y (22):

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi, \tag{23}$$

que es la llamada *forma binómica* del número complejo.

2.5 *Complejos conjugados.* Llamaremos *complejo conjugado* de (15) y lo indicaremos por $\overline{z}$, o bien z^*, al que resulta cambiando el signo del componente imaginario:

$$\bar{z} = z^* = (a, -b). \tag{24}$$

Teorema 1. (i) *La suma y el producto de dos complejos conjugados son números reales.*

(ii) *Recíprocamente: si la suma y el producto de dos complejos son números reales, tales complejos son conjugados.*

Demostración. (i) Se tiene, usando la forma binómica:

$$z + z^* = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0i = 2a, \tag{25}$$

$$z \cdot z^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2. \tag{26}$$

(ii) De (18) anulando el componente imaginario de la suma resulta: $d = -b$. Del mismo modo, anulando la parte imaginaria del producto (19):

$$0 = ad + bc = -ab + bc, \text{ de donde: } a = c.$$

Se verifica de inmediato esta importante propiedad:

Teorema 2. *El conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados de sus sumandos, y el conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados de sus factores:*[61]

$$(z + w)^* = z^* + w^*, \quad (z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*. \tag{27}$$

2.6. *División.* Para hallar el cociente de dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se multiplican dividendo y divisor por el conjugado de este último, o sea $c - di$. Así queda en el denominador el producto de dos complejos conjugados, que es real (teorema 1):

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{ac-adi+bic-bdi^2}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i.$$

El último miembro de esta serie de igualdades es un número complejo de la misma forma binómica que los datos de la división.

Ejemplo:

$$\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{4+9} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}\,i.$$

2.7 Las operaciones definidas en C tienen las mismas propiedades que en R (cap. 4-7.1). Por ejemplo, la conmutativa de la multiplicación resulta de las de la suma y la multiplicación de números reales, pues en virtud de (19) se tiene

$$(c, d)\cdot(a, b) \quad = \quad (ca-db, cb+da),$$

y como los componentes del segundo miembro son *ordenadamente iguales* a las del segundo miembro de (19), resulta:

$$(c, d)\cdot(a, b) \quad = \quad (a, b)\ \ (c, d).$$

El elemento neutro de la suma de complejos es el número complejo (0, 0), que en virtud de 2.3 se identifica con el número real 0.

Si $a + bi \neq 0$, el número complejo inverso se calcula, por 2.6, así:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i.$$

2.8 Demostremos que no es posible definir en el conjunto C de los números complejos un orden ≤ con las propiedades señaladas en capítulo 4-7.2 *para los reales* y su relación con la estructura algebraica.

Si tal orden existiera, el correspondiente *orden estricto* <, definido por

$$x < y \quad \text{si, y sólo si,} \quad x \leq y \ \text{ y } \ x \neq y,$$

tendría las propiedades:

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z \tag{28}$$

$$0 < x \ \text{ y } \ 0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y. \tag{29}$$

Ahora bien, como $i = (0, 1) \neq (0, 0)$, o sea $i \neq 0$, tendría que ser

$$0 < i \quad \text{o bien} \quad i < 0.$$

Veremos que esto es imposible. Supongamos que $0 < i$. Entonces, por (29) con $x = y = i$ resulta $0 < i^2$, o sea,

$$0 < -1.$$

Resulta de aquí, por (28), sumando 1 a ambos miembros:

$$1 < 0, \tag{30}$$

y, también de $0 < -1$ resulta, por (29) con $x = y = -1$:

$$0 < 1,$$

en contradicción con (30).

Análogamente se prueba que no puede ser $i < 0$.

3. Representación Cartesiana

3.1 Puesto que un número complejo es un par ordenado de números reales, o sea un elemento del producto cartesiano R × R (0. 3 g), el conjunto C de los números complejos es el producto cartesiano R × R y entonces puede representarse (confróntese 0. 3 *g*) por los puntos del plano de dos escalas métricas concurrentes para R.

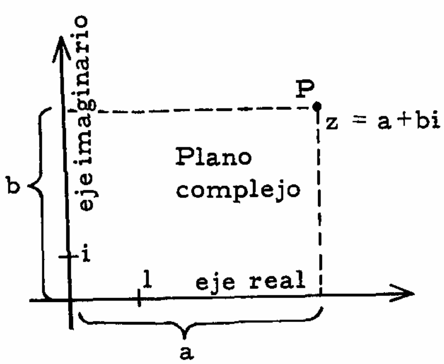


Fig. 32

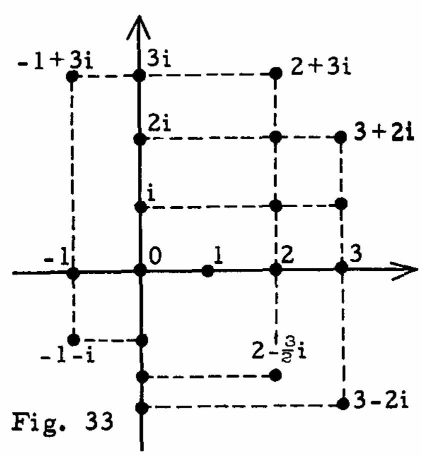


Fig. 33

Estas escalas suelen tomarse en rectas perpendiculares. Las partes real e imaginaria del complejo $z = a + bi$, o sea a y b (no bi) son las coordenadas del punto P que lo representa, en el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales cuyos ejes son el *eje real* o escala métrica de las partes reales, y el *eje imaginario* o escala métrica de las partes imaginarias (Fig. 32). El plano R × R se llama *plano complejo*.

3.2 En la figura 33 se representan 20 números complejos: $(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1, 2, 3$, $(0, 1) = i, \ldots$ Los complejos conjugados, como $3 + 2i$ y $3 - 2i$, se representan por puntos simétricos con respecto al eje real.

3.3 Esta representación geométrica fue adoptada por K. F. Gauss (1777-1855), y también por C. Wessel (1745-1818) y J. R. Argand (1768-1822) a comienzos del siglo XIX. Es desde luego innecesaria para la teoría del número complejo y de las operaciones en C, pero ejerció influencia positiva en tiempos en que los complejos se consideraban como números ficticios o irreales (de allí el nombre "imaginario"). La representación geométrica, que, como veremos permite efectuar las operaciones fundamentales mediante sencillas construcciones, contribuyó a disipar la desconfianza y a clarificar las ideas, preludiando una teoría científica rigurosa.

3.4 En el plano complejo $C = R \times R$, cada número complejo $z = a + bi$, correspondiente al punto $P(a, b)$, puede representarse también por el vector $\overrightarrow{OP}$ de *origen* $O(0, 0)$ y *extremo* $P(a, b)$. (Fig. 34.)

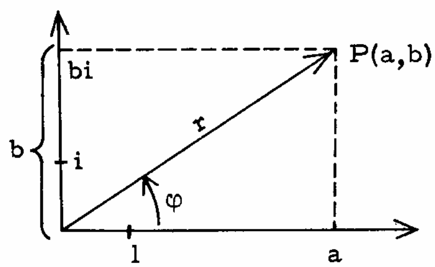


Fig. 34

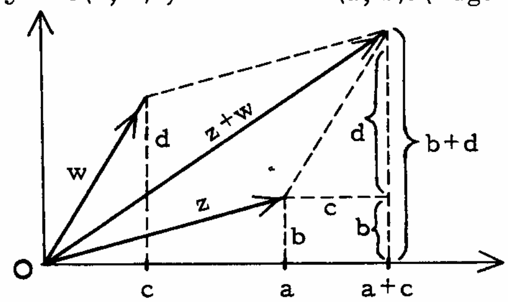


Fig. 35

La *suma* de los complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ es

$$z + w = (a + c) + (b + d)\, i,$$

y la figura 35 muestra cómo se construye mediante la conocida *regla del paralelogramo* para sumar vectores.

La figura 36 muestra la construcción geométrica de la *diferencia* [62]

$$z - w = z + (-w).$$

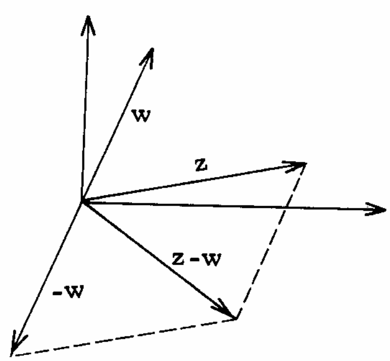


Fig. 36

4. Forma Polar

4.1 Otro método de representar los puntos de un plano mediante pares ordenados de números es el de las *coordenadas polares*. Un sistema de coordenadas polares queda determinado por:

(i) Un punto O del plano, llamado *polo;*

(ii) Una semirrecta x que parte del polo;

(iii) Un sentido de rotación S en el plano, alrededor del polo O;

(iv) Una unidad $u = |OA|$ (Fig. 37).

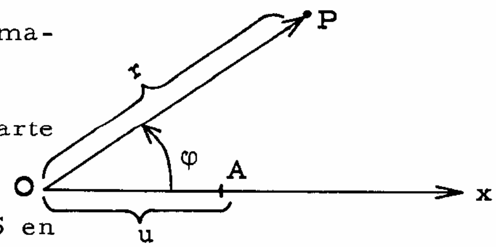


Fig. 37

Cada punto P (y también el vector $\vec{OP}$ que lo determina a partir del polo) queda determinado por la longitud $r = |OP|$ (medida con la unidad u), llamada *módulo* del vector $\vec{OP}$ o del punto P, y por el ángulo φ de lados x y OP en este orden, con el signo que le corresponda de acuerdo con el sentido de rotación S elegido (en la Fig. 37 es $\varphi > 0$ si dicho sentido S es el usual en Trigonometría). Este ángulo φ se llama *argumento* de P.

Los números r y φ se llaman *coordenadas polares* del punto P. El primero es no-negativo: $r \geq 0$. El segundo no está completamente determinado, pues sumando o restando un número entero de vueltas, o sea, en medida radial, 2π, 4π, $6\pi, \ldots$, resulta el mismo rayo OP y por tanto el mismo punto P. Entonces, este punto tiene *infinitos argumentos;* si uno de ellos es φ, los demás están dados por:

$$\varphi + 2k\pi, \quad (k \text{ entero, o sea, } k \in Z). \tag{31}$$

De entre estos infinitos argumentos suele tomarse uno solo, llamado *argumento principal,* y se elige como tal ya sea el menor no-negativo, es decir, sujeto a la condición

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \tag{32}$$

ya sea al que cumple la condición

$$-\pi < \varphi \leq \pi.$$

4.2 Conjuntamente con un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales con la misma unidad en ambos ejes (O; x, y)

consideremos el sistema de coordenadas de polo O, semieje $x \geq 0$, la unidad en él, y como sentido el de la rotación que lleva dicho semieje a superponerse con Oy mediante un giro de $\pi/2 = 90^\circ$ (Fig. 38). Un punto P del plano queda determinado, ya sea por el par (a, b) de sus coordenadas cartesianas, ya sea por el par (r, φ) de sus coordenadas polares, de modo que unas determinan a las otras. Del triángulo rectángulo OP_1P (o de la definición general de seno y coseno, si φ no es un ángulo del primer cuadrante) se obtiene:

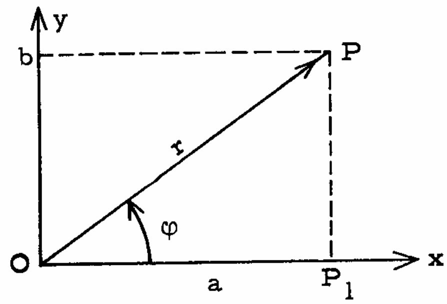


Fig. 38

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \operatorname{sen} \varphi, \tag{33}$$

fórmulas que determinan las coordenadas cartesianas a partir de las polares. De ellas (o bien de la Fig. 38) resultan las fórmulas de la *transformación inversa* (de coordenadas cartesianas a polares):

$$r = \left|\sqrt{a^2 + b^2}\right|, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \tag{34}$$

4.3 El punto P que representa al número complejo

$$z = a + bi, \tag{35}$$

queda determinado por sus coordenadas polares r y φ (Fig. 34). Estas se llaman también *módulo* $|z|$, y *argumento* arg z, *del número complejo* z y están dadas por (34), o sea:

$$|z| = \left|\sqrt{a^2 + b^2}\right|, \quad \arg z = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}. \tag{36}$$

Ejemplo. Hallar el módulo y argumento del complejo $z = 3 - 3i$. Es $|z| = |\sqrt{9+9}| = 3\,|\sqrt{2}|$; $\operatorname{tg} \varphi = 3/(-3) = -1$, y por tanto el ángulo φ corresponde a la bisectriz del segundo cuadrante (135°) o bien del cuarto cuadrante $(270^\circ + 45^\circ = 315^\circ)$. Por los signos de cada componente se ve que corresponde el segundo caso, es decir, $\varphi = \arg z = 315^\circ$.

4.4 Reemplazando (33) en (35) se obtiene la *forma polar* o *trigonométrica* [63] del número complejo z:

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi). \tag{37}$$

4.5 Para el *producto* de los complejos en forma polar (37) y

$$z' = r'(\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi'), \tag{38}$$

se tiene:

$$z \circ z' = r \cdot r' (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \cdot (\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi') =$$

$$= r \cdot r' \cdot [(\cos\varphi \cos\varphi' - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi') + i(\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi' +$$

$$+ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi')],$$

y, notando que los paréntesis del último miembro son respectivamente $\cos(\varphi + \varphi')$ y $\operatorname{sen}(\varphi + \varphi')$, se tiene:

$$z \cdot z' = r \cdot r' \cdot [\cos(\varphi + \varphi') + i \operatorname{sen}(\varphi + \varphi')], \tag{39}$$

es decir:

Teorema 1. *El módulo del producto de dos complejos es igual al producto de los módulos de éstos* [64], $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$; *y el argumento es la suma de sus argumentos* $\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z'$.

4.6 Análogamente, tendremos para el producto de n complejos

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + i \operatorname{sen}\varphi_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

la expresión:

$$z_1 \ldots z_k = r_1 \ldots r_k [\cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_k) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \ldots + \varphi_k)]. \tag{40}$$

4.7 Por definición de *cociente*, z/z' es el complejo que multiplicado por z' da como resultado z (véase 5-2.6). Por tanto se sigue del teorema 1:

Teorema 2. *El módulo del cociente de dos complejos es igual al cociente de los módulos de éstos y el argumento es igual a la diferencia de sus argumentos* [65]: $|z/z'| = |z|/|z'|$; $\arg(z/z') = \arg z - \arg z'$.

4.8 *Construcciones geométricas* [63]

(i) *Producto.* Representados los factores z y z' por los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$ (Fig. 39), como el argumento del producto es la suma $\varphi + \varphi'$, el punto que representa a $z \cdot z'$ estará en la semirrecta que resulta de transportar el ángulo φ a partir de OP'.

Uniendo P con el punto 1 se determina el ángulo O1P; la semirrecta trazada a partir de P' y que forma con OP' ese mismo ángulo, corta a la anterior en un punto Q, que representa al producto $z \cdot z'$.

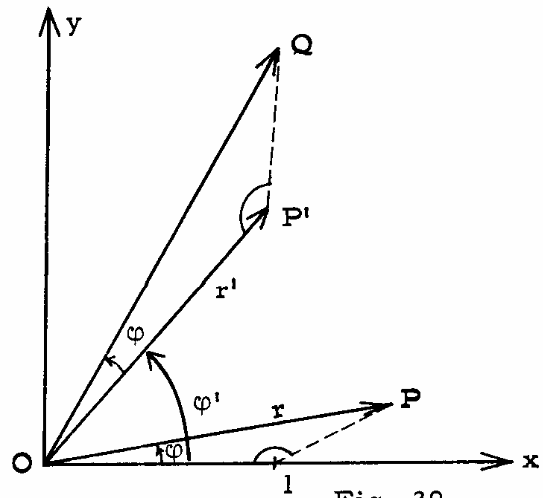


Fig. 39

En efecto, los triángulos O1P y OP'Q son semejantes, pues, por construcción, tienen sus ángulos respectivamente iguales. Entonces:

$$OQ/OP' = OP/O1, \text{ de donde } OQ = r \cdot r'.$$

(ii) *Cociente.* La misma construcción del producto (Fig. 39) indica la manera de construir el cociente. En efecto, habrá que determinar, por ejemplo, el punto P conociendo Q y P'. Transportando, a partir del eje real, el ángulo P'OP, se obtiene la semirrecta OP, y sobre ella se determina el punto P transportando al punto 1, y a partir de O1, el ángulo OP'Q.

4.9 *Desigualdades.* Como un lado de un triángulo nunca supera la suma de los otros dos, de la construcción goemétrica de la suma $z + w$ (Fig. 35) resulta la desigualdad entre módulos

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \tag{41}$$

que es válida con = si arg z = arg w.

Esta desigualdad es análoga a la (5) de capítulo 4-1.5, y de ella se deducen las análogas a las demás de 1.5, que se resumen en éstas

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z + w| \leq |z| + |w|. \tag{42}$$

5. Potencias y Raíces

5.1 Si en (40) suponemos todos los factores iguales a (37) resulta:

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi), \tag{43}$$

fórmula atribuida a A. De Moivre (1667-1754). Del teorema 2 de 4.7 puede deducirse que la fórmula (43) subsiste para exponente n nulo o negativo,[66] y entonces vale para n *entero* cualquiera.

5.2 Aplicación. *Fórmulas de multiplicación de arcos.* Si en (43) con $r = 1$,

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi,$$

se supone $n > 1$, se desarrolla el primer miembro por la fórmula del binomio de Newton y se igualan por separado partes reales y partes imaginarias en ambos miembros, resultan fórmulas que dan $\cos n\varphi$ y $\operatorname{sen} n\varphi$, en función de $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$. Por ejemplo, para $n = 3$ es

$$\cos^3\varphi + 3i \cos^2\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi - 3 \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}^2\varphi - i \operatorname{sen}^3\varphi =$$

$$= \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi.$$

e igualando partes reales e imaginarias resulta:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$\operatorname{sen} 3\varphi = 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi.$$

5.3 Por definición de raíz, la raíz n-ésima de un complejo

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \qquad (37)$$

será otro complejo

$$w = \mathrm{R}(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$$

cuya potencia n-ésima coincide con el primero, es decir verifica:

$$\mathrm{R}^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

Pero, para que esta igualdad se verifique, es necesario y suficiente que sean iguales los módulos R^n y r, y que los argumentos $n\phi$ y φ difieran en un número entero de vueltas (confróntese 4.1). Se tiene entonces, siendo k un número entero:

$$\mathrm{R}^n = r, \quad n\phi = \varphi + 2k\pi,$$

y de aquí resultan módulo y argumento de la raíz buscada:

$$\mathrm{R} = \sqrt[n]{r}, \quad \phi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}. \qquad (44)$$

Vemos aquí que, si bien el módulo R del complejo $w = \sqrt[n]{z}$ está unívocamente determinado, no ocurre otro tanto con el argumento, pues en su expresión figura un número indeterminado k, que puede tomar cualquier valor entero, y parecería que hay infinitos valores para la raíz $\sqrt[n]{z}$. Pero sólo hay n *valores distintos*, correspondientes a los n argumentos siguientes, que resultan de dar a k los valores $0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi}{n} + 2\,\frac{2\pi}{n}, \ldots, \quad \frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}. \tag{45}$$

En efecto, el argumento siguiente, $\frac{\varphi}{n} + n\frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$, difiere del primero en un giro completo, y, análogamente, todos los demás difieren de alguno de los (45) en un número entero de giros.

Tenemos entonces:

Teorema. *Todo número complejo no nulo* (37) *tiene n raíces n-ésimas distintas cuyo módulo es la raíz n-ésima aritmética del módulo r, y cuyos argumentos están dados por* (45).

5.4 Para la representación geométrica de las raíces se traza una circunferencia con centro en el origen y radio r, en ella están los puntos que representan las raíces n-ésimas. Luego se fija en dicha circunferencia el punto P_0, cuyo argumento φ/n se halla dividiendo en n partes iguales el argumento dado. Este punto P_0 representa una raíz n-ésima de z, y dividiendo la circunferencia en n partes iguales a partir de él, obtenemos los puntos P_0, P_1, $P_2, \ldots, P_{n-1}$ que representan las n raíces n-ésimas de z.

Los puntos $P_0, \ldots, P_{n-1}$ son, pues, vértices de un *n-gono regular* inscrito en la circunferencia de radio r.

5.5 *Raíces de un número real c.* Si $c = 0$, toda raíz n-ésima ($n = 2, 3, \ldots$) es 0. Consideremos por separado los otros casos: $c > 0$ y $c < 0$.

(i) Si c es *positivo,* puesto que se identifica (véase 2.3) con el complejo $(c, 0) = c + 0i = c(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, de argumento $\varphi = 0$, en virtud de (45) sus n raíces n-ésimas tienen por argumentos:

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \ldots, \quad (n-1)\,\frac{2\pi}{n}.$$

Si el índice n es *par,* $n = 2h$, hay *dos raíces reales,* de argumentos 0 y $h(2\,\pi/n) = \pi$, es decir, números opuestos. Si n es *impar* sólo hay *una raíz real*, positiva, correspondiente al argumento 0.

(ii) Si c es negativo se puede considerar como un complejo de argumento π:

$$c = (-c)(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi), \quad (-c > 0),$$

y entonces, en virtud de (45), sus n raíces n-ésimas tienen por argumentos:

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \ldots, \frac{(2k-1)\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}. \tag{46}$$

Si el índice es *impar:* $n = 2h-1$, al dar a k en (46) el valor h, resulta el valor π para el argumento, y entonces hay *una raíz real negativa*. Si n es *par*, *no hay ninguna raíz real*.

5.6 *Raíces primitivas de la unidad*. Las raíces n-ésimas de 1 que no son raíces de 1 de orden menor que n, se llaman *raíces primitivas* de *orden* n. Las demás son raíces de 1 de orden menor que n y, por tanto, cada una es primitiva de cierto orden $n' < n$.

Por ejemplo, las raíces de orden 4 de 1 son 1, -1, i y $-i$. Las dos últimas son primitivas de orden 4, pero 1 y -1 no lo son: -1 es primitiva de orden 2, y 1 lo es de primer orden.

Teorema 1. *Los productos, cocientes y potencias de exponente natural de las raíces n-ésimas de 1 son también raíces n-ésimas de 1.*

Demostración. Si es $u^n = 1$ y $v^n = 1$, es también:

$$(u \cdot v)^n = u^n v^n = 1, \left(\frac{u}{v}\right)^n = \frac{u^n}{v^n} = 1, \quad (u^h)^n = (u^n)^h = 1^h = 1,$$

es decir, $u \cdot v$, u/v y u^h son raíces n-ésimas de 1.

Teorema 2. *Se obtienen todas las raíces primitivas de orden n de 1 dando a k en la fórmula*

$$u = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \tag{47}$$

todos los valores primos con n y menores que n.

Demostración. u es raíz de orden h si, y sólo si,

$$u^h = \cos \frac{2kh\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2kh\pi}{n} = 1,$$

o sea si, y sólo si, el argumento es múltiplo de 2π, es decir, kh múltiplo de n. Entonces:

(i) Si k es primo con n debe ser h múltiplo de n, luego el menor valor posible de h es n, es decir, u es raíz *primitiva* de orden n.

(ii) Si k no es primo con n y llamamos k' y n' a los cocientes de k y n por su máximo común divisor, se tiene, simplificando en (47):

$$u = \cos \frac{2k'\pi}{n'} + i \operatorname{sen} \frac{2k'\pi}{n'},$$

y, por ser k' primo con n', u es raíz primitiva de orden $n' < n$.

Teorema 3. *Si u es una raíz primitiva de orden n, las potencias*

$$u, \quad u^2, \quad u^3, \ldots, \quad u^n, \tag{48}$$

son todas las raíces de orden n.

Demostración. Por teorema 1, los números (48) son raíces de orden n. Además, son todos distintos, pues si fuera $u^h = u^k$ con $0 < h < k < n$, sería $u^h \cdot (u^{k-h}-1) = 0$, o sea (por ser $u^h \neq 0$):

$$u^{k-h} = 1, \quad \text{con} \quad 0 < k-h < n,$$

contra la hipótesis de que u es raíz primitiva de orden n.[67]

6. El Teorema Fundamental del Algebra

6.1 Hemos introducido los números complejos para resolver la sencilla ecuación $x^2 + 1 = 0$. Luego vimos (1.5) que en C es siempre posible resolver toda ecuación de segundo grado, $x^2 + px + q = 0$, y por 5.5 puede resolverse en C toda ecuación algebraica de la forma $x^n - c = 0$.

6.2 Estos son casos particulares de esta propiedad general: el cuerpo C de los números complejos es *algebraicamente cerrado*, es decir:

Toda ecuación algebraica (con coeficientes reales o complejos):

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0 \qquad (49)$$

tiene por lo menos una solución en el campo C de los números complejos.[68]

Este teorema, demostrado por Gauss en 1799 por primera vez, se llama *teorema fundamental del Algebra,* aunque su demostración (que excede el alcance de esta monografía) no puede hacerse con recursos algebraicos solamente.[69]

6.3 A partir del teorema fundamental del Algebra puede probarse[70] que

Todo polinomio de grado n

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n,$$

puede descomponerse en el producto de n factores de primer grado

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n), \qquad (50)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales o complejos, raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

Por ejemplo:

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x+i)(x-i).$$

6.4 En ciertos casos, los factores de (50) no son todos distintos. Por ejemplo,

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1),$$

y en este caso la ecuación $f(x) = 0$ tiene la única raíz $x = 1$, que se llama *doble* o de *multiplicidad* 2. Análogamente, la ecuación de quinto grado

$$(x-2)^3 (x+1)^2 = 0$$

tiene la *raíz triple* 2 y la *raíz doble* -1. En todos los casos, la suma de las multiplicidades es igual al grado de la ecuación.

6.5 De la factorización (50) se deduce que los números a_1, a_2, $\ldots$, a_n son raíces de la ecuación (49), pues en

$$f(a_r) = (a_r - a_1)(a_r - a_2) \dots (a_r - a_n), \qquad 1 \le r \le n,$$

se anula el factor $a_r - a_r$ y por tanto el producto.

Pero además, se deduce de (50) que los números $a_1, \dots, a_n$ son las unicas raíces de (49), pues si c es una raíz:

$$f(c) = (c - a_1)(c - a_2) \dots (c - a_n) = 0,$$

como el producto de varios complejos es 0 *si, y sólo si,* uno por lo menos de los factores es 0, c debe ser igual a uno de los números a_i.

NOTAS

1. El conjunto A de los elementos de un conjunto X que tienen la propiedad P se designa

$$A = \{x \in X \mid x \text{ tiene la propiedad } P\},$$

o con la notación (1) si el conjunto X está sobreentendido. A partir del conjunto X formamos el conjunto A *seleccionando* los elementos que tienen la propiedad P. La presencia --explícita o no-- del conjunto X es esencial para no caer en contradicciones, llamadas *paradojas de la teoría de conjuntos,* de las cuales una de las más conocidas es la llamada "paradoja de Russell".

2. Es cuestión de convención incluir o no el cero entre los números naturales. Lo hemos hecho para precisar más fácilmente la relación ≤ en N, que es una *relación de orden,* de acuerdo con la definición 7 de capítulo 2-6. 2.

3. El sistema de los llamados *axiomas de Peano* fue utilizado por J. W. R. Dedekind (1831-1916), en 1888 *(Gasammelte Mathematische Werke,* 1932; vol. 3, pág. 359-61), y adoptado un año después por G. Peano (1858-1932). La idea de una fundamentación estricta de la Aritmética cobró fuerza desde mediados del siglo XIX.

4. La coordinabilidad de conjuntos es una *relación de equivalencia* (cap. 3-2). Por tanto es base de una *definición por abstracción* (cap. 3-3), la de *número cardinal,* como clase de equivalencia.

5. En esta exposición previa admitimos tácitamente que subsiste en Z la propiedad asociativa de la suma.

6. Mediante esta limitación de instrumentos geométricos, señalamos que la *escala métrica* se construye con recursos de *Geometría afín.* En dimensión 1 no cabe distinguir entre afín y métrico.

7. Papy y Debbaut [7] definen la *multiplicación* a partir de la homotecia, al fundamentar el número real en recursos de Geometría afín plana.

8. Si se define el número a partir de los naturales, las inclusiones como $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ deben fundamentarse en procesos de inmersión (embedding); véase capítulo 3-6 y 11.

9. Confróntese la nota 5.

10. Confróntese la nota 8.

11. Confróntese la nota 6.

12. $\sqrt{2}$ es un irracional algebraico *de segundo grado*, solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$.

13. Suele decirse que el sistema de axiomas da una definición *implícita* o *axiomática* de los términos primitivos de la teoría. Tal forma de "definición", a la que objetan los lógicos, es considerada por Peano y Russell.

14. O sea, la *relación* sig es una *función* o *aplicación* de N en N.

15. O sea, la función sig: $N \to N$ (nota 14) es *inyectiva*.

16. Un subconjunto C de N se llama *inductivo* si

$$x \in C \Rightarrow \mathrm{sig}(x) \in C.$$

Con esta definición, el axioma 5 puede enunciarse así:

Un subconjunto inductivo de N *que contenga a* 0, *es todo* N.

17. En cada caso el procedimiento debe analizarse sobre todo con miras a la *existencia* y *unicidad* de $E(n)$ y por eso, en general, una definición por recurrencia se basa en un teorema de existencia y unicidad, a veces sobreentendido pero en ocasiones nada trivial. Es preciso distinguir lo que es propiamente definición, de la demostración que la justifica.

18. La inducción completa incorpora en los métodos de la Matemática una forma de inferencia desconocida por la lógica aristotélica. Se han descubierto en los textos de la antigüedad aplicaciones más o menos conscientes del principio de recurrencia, pero quien parece haberlo concebido claramente es el italiano del siglo XVI F. Maurolico (*Arithmeticorum Libri Duo*, Venecia 1575). Este principio se viene aplicando regularmente desde el siglo XVII.

19. Se verán en 5. Esta sección 3 se refiere al principio de inducción completa en general, y no al desarrollo sistemático de la axiomática de Peano, que se retoma en 4.

20. Otra generalización más importante se basa en el teorema de buena ordenación de los números naturales; véase la nota 27.

21. Demostraciones detalladas pueden verse, por ejemplo, en E. Landau [1].

22. Es decir, un sumando o término común a ambos miembros de una igualdad, puede suprimirse.

23. Si $*$ es una operación binaria en G, es decir, una aplicación de $G \times G$ en G, el par $(G, *)$ se llama *grupoide*. Un grupoide $(G, *)$ se llama *semigrupo* si la operación $*$ es asociativa.

Los teoremas 6 y 13 establecen que $(N, +)$ *y* $(N, \cdot)$ *son semigrupos*.

24. En cambio $<$ es un *orden estricto*. La relación inversa de un orden es también un orden (llamado *orden inverso)*, y lo mismo se aplica al orden estricto. Entonces $\leq^{-1}$ (o sea, $\geq$) es un orden, y $<^{-1}$ (o sea, $>$) es un orden estricto. Hemos convenido en considerar el 0 como número natural para definir en forma natural una relación de orden (confróntese la nota 2).

25. Diremos que $(G, *, \preccurlyeq)$ es un *semigrupo ordenado* si:

(i) $(G, *)$ es un semigrupo (nota 23);

(ii) $\preccurlyeq$ es una relación de orden en G;

(iii) $a \preccurlyeq b \Rightarrow a * c \preccurlyeq b * c$.

En virtud del teorema 17, $(N, +, \leq)$ *es un semigrupo ordenado*.

26. Un conjunto ordenado (por una relación que llamaremos de precedencia) se llama *bien ordenado* si toda parte no vacía de él tiene un elemento que precede a todos los demás.

27. En el teorema 19 se funda un segundo método de demostración por recurrencia, de gran importancia en la Aritmética transfinita.

28. Si (A, +, ·) es un anillo (nota 35) cuyo elemento neutro respecto de la operación + se indica por 0, y si es $a \cdot b = 0$ con $a \neq$ $\neq 0$ y $b \neq 0$, los elementos a y b se llaman ***divisores de cero,*** a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Nótese que (N, +, ·) *no* es un anillo.

29. Es decir, como aplicación de Z × Z en Z.

30. Es decir, una aplicación de Z × Z en Z.

31. Para ello se comienza por observar que la segunda (18) equivale a

$$(x_1 + b_1, x_2 + b_2) \sim (a_1, a_2),$$

o sea, a la igualdad entre números naturales:

$$x_1 + b_1 + a_2 = x_2 + b_2 + a_1, \qquad (^\circ)$$

y se considera esta igualdad como una ecuación con dos incógnitas x_1, x_2, que pueden tomar valores en N (números naturales).

Distingamos los tres casos siguientes:

(i) $b_1 + a_2 = b_2 + a_1$. Las soluciones $(x_1, x_2) \in N \times N$ de la ecuación ($^\circ$) son los infinitos pares

$$(h, h), \quad (h \in N),$$

y sólo ellos. Pero estos pares pertenecen todos a la clase de equivalencia [0, 0].

(ii) $b_1 + a_2 > b_2 + a_1$. Las soluciones $(x_1, x_2) \in N \times N$ de la ecuación ($^\circ$) son los infinitos pares ordenados

$$(h, h + (b_1 + a_2) - (b_2 + a_1)), \quad (h \in N)$$

y sólo ellos. Pero estos pares pertenecen todos a la clase de equivalencia $[0, b_1 + a_2 - (b_2 + a_1)]$.

(iii) $b_1 + a_2 < b_2 + a_1$. Las soluciones $(x_1, x_2) \in N \times N$ de la ecuación ($^\circ$) son los infinitos pares ordenados

$$(h + b_2 + a_1 - (b_1 + a_2), h), \quad (h \in N),$$

y sólo ellos. Pero estos pares pertenecen todos a la misma clase de equivalencia $[b_2 + a_1 - (b_1 + a_2), 0]$.

32. Este proceso de identificación se llama de *ampliación por isomorfismo*. Para una descripción más precisa puede verse, por ejemplo, Cohen y Ehrlich [5], pág. 57.

33. Para verlo, comencemos por notar que si a ambos componentes de un par ordenado (a, b) se suma un mismo número natural, o se resta (si es posible en N) un mismo número natural, se obtiene un par equivalente. Dado el par ordenado

$$(a, b),$$

se presenta uno, y sólo uno, de estos dos casos:

$$a \geq b \quad \text{ó} \quad a < b. \qquad (^{\circ})$$

Si de ambos componentes de (a, b) se ***resta*** el número natural

$$b \quad \text{ó} \quad a$$

respectivamente, se obtiene el par equivalente

$$(a - b, 0) \quad \text{ó} \quad (0, b - a),$$

y entonces, según cuál sea el caso de $(^{\circ})$ que se presente, es

$$[a, b] = [a - b, 0] \text{ ó } [a, b] = [0, b - a].$$

34. Un semigrupo (nota 23) (G, $*$) es un *grupo* si: (i) existe un elemento $u \in$ G tal que para todo $x \in$ G es $u * x = x * u = x$; (ii) para cada $x \in$ G existe un elemento $x' \in$ G tal que $x * x' = x' * x = u$.

Un grupo (G, $*$) se llama *conmutativo* si $x * y = y * x$.

Las propiedades $a_1 - a_4$ pueden enunciarse así: (Z, +) *es un grupo conmutativo*.

35. Se dice que (A, +, ·) es un *anillo* si:

(i) (A, +) es un grupo conmutativo (nota 34);

(ii) (A, ·) es un semigrupo (nota 23);

(iii) · es distributiva a la izquierda y a la derecha respecto de +.

El anillo $(A, +, \cdot)$ se llama *conmutativo* si el semigrupo $(A, \cdot)$ es conmutativo; $(A, +, \cdot)$ se llama *anillo con unidad* si el semigrupo $(A, \cdot)$ tiene unidad, es decir, elemento neutro respecto de la operación $\cdot$.

Las propiedades de las operaciones en Z pueden resumirse en este enunciado: $(Z, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con unidad.*

36. Un anillo conmutativo con unidad (nota 35) y sin divisores de cero (nota 28) se llama *dominio de integridad.* De la inexistencia de divisores de cero en N (cap. 2-6.5) y el presente teorema 4 se puede deducir que Z no tiene divisores de cero. En consecuencia: $(Z, +, \cdot)$ *es un dominio de integridad.*

37. Un orden que no sea total o lineal se llama *orden parcial.* Un ejemplo de orden parcial es la relación de inclusión entre las partes o subconjuntos de un conjunto dado.

38. Un dominio de integridad (nota 36) en el cual hay una relación de orden $\leq$ con las propiedades IIa y IIb se llama *dominio de integridad ordenado.* Además, puede probarse que Z está *bien ordenado* (véase la nota 26) por $\leq$.

Con estas propiedades queda *caracterizado* el sistema de los enteros, naturalmente salvo un isomorfismo. En otras palabras, se puede demostrar que *todo dominio de integridad bien ordenado es isomorfo al dominio* Z *de los enteros.* Véase, por ejemplo, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo [8], nota I del capítulo 2.

39. Es decir, aplicaciones del producto cartesiano $Z \times Z$ en Z.

40. O aplicación de $Z \times Z$ en Z.

41. Es decir, como aplicación de $Q \times Q$ en Q.

42. O aplicación del producto cartesiano $Q \times Q$ en Q.

43. Es decir, una aplicación de $Q_0 \times Q_0$ en Q_0, restricción de otra aplicación, de $Q \times Q_0$ en Q.

44. Confróntese la nota 32; véase Cohen y Ehrlich [5], pág. 66-7.

45. Si $x = \frac{3}{1} = 3$, $x^{-1} = \frac{1}{3}$, y es consistente con ello la notación $\frac{1}{x}$ para el número inverso de x ($x \in Q$, $x \neq 0$).

46. Un anillo $(A, +, \cdot)$ se llama *cuerpo* si todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo. Las propiedades anteriores pueden enunciarse así: Q *es un cuerpo conmutativo.*

47. En rigor, habría que distinguir distintos órdenes $\leq$, en N, en Z, en Q, con distintos símbolos como $\leq_N$, $\leq_Z$, $\leq_Q$. No lo hemos hecho para no complicar las notaciones, pero cuando es preciso decimos "$\leq$ en Z", "$\leq$ en Q", ...; véase 12.3 a 12.5.

48. Un cuerpo $(A, +, \cdot)$ se llama *cuerpo ordenado* si existe en A un orden total $\leq$, con las propiedades IIa y IIb. Las propiedades enunciadas hasta aquí para Q pueden resumirse así: Q *es un cuerpo ordenado conmutativo.*

El cuerpo Q de los números racionales es el menos amplio entre los cuerpos conmutativos ordenados, en el sentido de que es válida esta propiedad: *Todo cuerpo conmutativo ordenado* K *contiene un subcuerpo isomorfo con* Q. Véase por ejemplo, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo [8] nota I del capítulo 2.

49. Todo cuerpo ordenado es denso. En cambio, en un cuerpo ordenado puede no ser válido el axioma de Arquímedes. Las propiedades enunciadas en 12.1 y 12.4 pueden resumirse así: Q *es un cuerpo ordenado conmutativo arquimediano.*

50. He aquí la demostración de la equivalencia anterior:

Por definición de $|x|$, $-|x| \leq x \leq |x|$, pues $x = |x|$ ó $x = -|x|$. Supongamos $|x| \leq r$, entonces: $-r \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq r$.

Recíprocamente, supongamos $-r \leq x \leq r$. Entonces, si $x \geq 0$, $|x| = x \leq r$, y si $x < 0$, $|x| = -x \leq r$. En ambos casos es $|x| \leq r$.

51. También puede demostrarse (5) así. Sumando las desigualdades

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|,$$

se obtiene

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

y, en virtud de la equivalencia demostrada en la nota 50:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

52. Puesto que $|-b| = |b|$ se tiene, en virtud de la desigualdad demostrada en la nota 51:

$$|c - b| = |c + (-b)| \leq |c| + |-b| = |c| + |b|,$$

y haciendo aquí $c - b = a$, de donde $c = a + b$, resulta

$$|a| \leq |a + b| + |b|, \quad \text{o sea} \quad |a + b| \geq |a| - |b|,$$

que es la segunda (6). Cambiando entre sí a con b resulta la primera (6).

53. Esto significa que la igualdad de dos números reales se caracteriza por el hecho de que ninguna aproximación por defecto de uno de ellos supere a una aproximación por exceso del otro.

54. Para que esta definición sea legítima es necesario que lo sea la de una operación entre *clases* de encajes de intervalos que dan los sumandos reales, y no una operación entre los encajes mismos. Se prueba, en efecto, que el resultado es independiente del encaje de intervalos que representa cada sumando.

55. Los detalles pueden verse, por ejemplo, en Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo [8], § 7-5.

56. Las definiciones de número real dadas en 2, 4 y 5 son equivalentes; véase la nota 59.

57. El teorema puede demostrarse en forma *constructiva* (es decir, con un procedimiento para *determinar* el supremo), formando un encaje de intervalos. El procedimiento de demostración se puede adaptar para hallar cifras decimales sucesivas del número buscado. Se parte de un intervalo de longitud 1, cuyo extremo superior sea la menor cota superior *entera* del conjunto (su existencia puede deducirse del teorema de buena ordenación; véase cap. 2-6.4). Dividido este intervalo en 10 de longitudes 1/10 se toma como segundo intervalo del encaje el situado más a la derecha entre los subintervalos *cerrados* que contienen algún punto del conjunto, y se prosigue así indefinidamente. Se construye así un encaje de intervalos que determina el supremo por sus cifras decimales por defecto y por exceso.

58. **Demostración.** Puesto que la clase A tiene una cota superior (cualquier elemento de B), tiene un supremo L. Si $L \in A$, A tiene un elemento L mayor que todos los demás. Si $L \notin A$, entonces $L \in B$, y B tiene un elemento L menor que todos los demás.

59. Se demuestra que para todo cuerpo ordenado conmutativo K son *equivalentes* las siguientes condiciones (algunas de las cuales se expresan con conceptos que no hemos definido aquí):

(i) K es arquimediano y toda sucesión fundamental tiene límite en K;

(ii) K es arquimediano y completo (en el sentido de la propiedad Ic de 7.2, con "elemento de K" en vez de "número real");

(iii) Toda parte no vacía de K que tenga una cota superior, tiene supremo en K;

(iv) Toda parte no vacía de K que tenga una cota inferior, tiene ínfimo en K;

(v) Teorema 3, con K en lugar de R;

(vi) (Compacidad local) Si A es un subconjunto *cerrado y acotado* de K y C es un *cubrimiento* de A por intervalos abiertos, C tiene un subcubrimiento finito de A;

(vii) (Compacidad local sucesional) Todo subconjunto infinito y acotado de K tiene un *punto de acumulación* en K.

60. El sistema (R, +, ·, ≤) se *caracteriza* como *cuerpo conmutativo ordenado arquimediano completo*, naturalmente salvo isomorfismos. En otras palabras, se puede demostrar que todo tal cuerpo es isomorfo al cuerpo ordenado R de los números reales. Véase Cohen y Ehrlich [5], pág, 102, o bien Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo [8], nota I del capítulo 2.

61. O sea, la aplicación f: C → C dada por $f(z) = z^*$, que es biyectiva, es un *automorfismo* del cuerpo C. Se demuestra que éste es el único automorfismo continuo del cuerpo C, aparte de la identidad.

62. Para la representación de los números complejos es inesencial que los ejes real e imaginario sean perpendiculares. Las construcciones de la suma y la diferencia sólo exigen recursos de Geometría *afín*. En cambio la representación polar (véase 4) y las construcciones del *producto* y del cociente (4.8) exigen recurrir a la geometría *métrica* del plano.

63. Aunque la teoría del número complejo en su forma polar se apoya en conceptos geométricos como el de *argumento* y las funciones circulares, éstos son suceptibles de definición aritmética pura. Véase Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo [8], § 45-3.

64. La condición para que el producto (39) sea nulo es $r \cdot r' = 0$, y para esto es necesario y suficiente que sea nulo r ó r'. Luego:

Para que un producto de números complejos sea nulo, es necesario y suficiente que sea nulo uno por lo menos de los factores.

La igualdad $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ puede establecerse también a partir de las formas binómicas $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$, mediante la igualdad fácilmente verificable:

$$(a^2 + b^2) \cdot (a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2.$$

65. Entonces, para los complejos (37) y (38) se tiene:

$$z/z' = (r/r') [\cos (\varphi - \varphi') + i \operatorname{sen} (\varphi - \varphi')]. \qquad (^{\circ})$$

Puede tomarse como "definición convencional" de potencia de base e y exponente imaginario puro, la expresión

$$\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi = e^{i\varphi}, \qquad (^{\circ\circ})$$

que se justifica de varias maneras, por ejemplo mediante desarrollos en serie (véase Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo [8], § 45-3).

De (37) y ($^{\circ\circ}$) se deduce la *expresión exponencial* de un número complejo:

$$z = r\, e^{i\varphi}$$

muy adecuada para formalizar y recordar fácilmente algunas reglas para operaciones en el campo complejo. Por ejemplo, de

$$z = r\, e^{i\varphi} \quad \text{y} \quad z' = r'\, e^{i\varphi'}$$

se deducen, aplicando en el campo complejo las reglas para multiplicar y dividir potencias de igual base, las fórmulas (38) y ($^{\circ}$) en las formas:

$$z \cdot z' = r \cdot r'\, e^{i(\varphi + \varphi')}, \quad z/z' = (r/r')\, e^{i(\varphi - \varphi')}.$$

Consecuencia del teorema 2 es que la división z/z' es posible si $|z'| \neq 0$, o sea si $z' \neq 0$. Subsisten las propiedades algebraicas de los números reales enumeradas en capítulo 4-7.1, y entonces: (C, +, ·) *es un cuerpo conmutativo.*

Se demuestra que la única extensión de R a un cuerpo conmutativo es C, o sea, que si un cuerpo conmutativo K tiene un subcuerpo isomorfo a R, K es isomorfo a R o a C.

66. En este último caso, si $r \neq 0$. Con la expresión exponencial de los complejos (nota 65), la fórmula (43) se escribe

$$(r\, e^{i\varphi})^n = r^n\, e^{in\varphi},$$

es decir, se obtiene formalmente operando con productos y potencias como en el campo real.

67. Más detalles sobre raíces primitivas pueden verse en [8], § 10-5.

68. Para ecuaciones de 3° y 4° grados esta proposición fue demostrada por los algebristas del siglo XVI, como N. Tartaglia (1500-1557) y H. Cardano (1501-1576) quienes, además, resolvieron tales ecuaciones mediante fórmulas con radicales, similares a la de 1.5 para ecuaciones de segundo grado, aunque más complicadas.

69. Una demostración mediante consideraciones topológicas sencillas puede verse en Courant y Robbins [9], capítulo 5, apéndice 3. El teorema es corolario del teorema del módulo máximo de la teoría de las funciones analíticas; véase [8], § 114-6.

70. Véase, por ejemplo, Courant y Robbins [9], capítulo 2, § 5-4.

BIBLIOGRAFIA

[1] LANDAU, E. Grundlagen der Analysis, Akademie Verlag., Leipzig, República Democrática Alemana (1930); Chelsea, Nueva York, N. Y., EE. UU. (1946). Traducción al inglés: Foundations of Analysis. The Arithmetic of Whole, Rational, Irrational and Complex Numbers, Chelsea, Nueva York, N. Y., EE. UU. (1951).

Desarrolla el método axiomático de Peano en una exposición accesible y a la vez precisa de estilo muy conciso. Los teoremas enunciados en el capítulo 2 de esta monografía están demostrados en detalle. Ejercicio muy valioso sería hacer las demostraciones con las indicaciones que dimos, y cotejarlas con las de este libro.

[2] VOGEL, A. Klassische Grundlagen der Analysis, Hirzel, Leipzig, República Democrática Alemana (1952).

Da un desarrollo cuidadoso de las ampliaciones del número, que destaca el papel esencial de las clases de equivalencia.

[3] DOBROT, S. Real Numbers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., EE. UU. (1964).

Breve presentación de material no siempre autocontenido, con omisión de algunas demostraciones. Trata en especial de cuestiones históricas y axiomáticas, aproximación de números reales por racionales, cardinalidad y medida.

[4] ROBERTS, J. B. The Real Number System in an Algebraic Setting, Freeman, San Francisco, Calif., EE. UU. (1962).

Contiene detalles sobre relaciones, funciones y operaciones, y Aritmética cardinal.

[5] COHEN, L. W. y EHRLICH, G. The Structure of the Real Number System, Van Nostrand, Princeton, N. J., EE. UU. (1963).

Tratamiento lúcido y muy completo, más avanzado que los anteriores, en estrecha relación con las estructuras generales del Algebra. Contiene numerosos ejercicios.

[6] LIGHTSTONE, H. A. Symbolic Logic and the Real Number System, Harper & Row, Nueva York, N. Y., EE. UU. (1965).

Destinado a lectores con cierta madurez matemática, da una cuidadosa fundamentación lógica.

[7] PAPY, G. y DEBBAUT, P. Géométrie affine plane et Nombres réels, Presses Universitaires de Bruxelles, Bruselas, Bélgica (1964).

Breve y muy denso folleto, cuya lectura no es fácil para el principiante. Da una presentación novedosa del número real mediante recursos de Geometría afín plana y uso del sistema binario, según las ideas que se esbozan en capítulo 1-2 a 4.

[8] REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P. y TREJO, C. A. Análisis Matemático, Vol. I, 7ª ed. (1963); Vol. II, 5ª ed. (1963); Vol. III, 3ª ed. (1965). Kapelusz, Buenos Aires, Argentina.

Contiene temas que amplían el contenido de esta monografía, en especial los teoremas "de categoricidad" mencionados en las notas 38, 48 y 60, en el volumen I, y el teorema fundamental del Algebra en el volumen III.

[9] COURANT, R. y ROBBINS, H. What is Mathematics?, Oxford Univ. Press, Londres, Inglaterra (1941). Traducción al español: ¿Qué es la Matemática?, Alda, Buenos Aires, Argentina (1954).

Libro de alta divulgación, atrayente y pedagógico, sin fáciles concesiones, si bien destinado al gran público de cultura media, da una visión general de conceptos y métodos de la matemática. Contiene ampliaciones de interés a los temas tratados aquí, en especial sobre números complejos.

COLECCION DE MONOGRAFIAS CIENTIFICAS

Publicadas

Serie de matemática

N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
N° 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
N° 5. Algebra Lineal, por Orlando Villamayor.
N° 6. Principios, Conjuntos y Algebras de Boole, por Jorge E. Bosch.
N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.

Serie de física

N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.

Serie de química

N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y M. Burachik.
N° 4. Mecanismo de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.

Serie de biología

N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.

N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.

En preparación

Serie de matemática

Algebra Linear e Geometría Euclidiana, por Alexandre Martins Rodrigues.
Funções Reais de Variável Real, por Djairo Guedes de Figueiredo.
Introducción a la Topología, por Juan Horváth.
Funciones de Variable Compleja, por José Nieto.

Serie de física

Física de Partículas, por Igor Saavedra.
Física Nuclear, por Mariano Bauer E. y Alfonso Mondragón.
Física Cuántica, por Thomas A. Brody.
Experimento y Teoría en la Enseñanza de la Física al Nivel Secundario, por Félix Cernuschi.
Nuevas Orientaciones en la Enseñanza de la Física, por Darío Moreno.
Fuerzas Nucleares, por Oscar Sala.

Serie de química

Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.
Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
Complejos, por Manuel Madrazo Garamendi.

Serie de biología

Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.
Hereditariedade Humana, por P. H. Saldanha.

Nota. Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la División de Ventas y Promoción, Unión Panamericana, Washington, D. C. 20006.